
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06641265 5





IQUES

IBRES

S

MÉDIATE)

MANN

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CARRÉS MAGIQUES

DE

L'ORDONNANCE DES NOMBRE

DANS LES

CARRÉS MAGIQUES IMPAIRS

(PROCÉDÉS GÉNÉRAUX POUR LEUR CONSTRUCTION IMMÉDIATE)

PAR

A. MARGOSSIAN

INGÉNIEUR
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1908

DE

L'ORDONNANCE DES NOMBRES

DANS LES

CARRÉS MAGIQUES IMPAIRS

(PROCÉDÉS GÉNÉRAUX POUR LEUR CONSTRUCTION IMMÉDIATE)

terminer la raison d'être de mes procédés qui n'ont d'ailleurs pas été aperçus par cet auteur, la voie qu'il s'était tracée ne pouvant pas les lui donner directement. Ses méthodes permettent de constituer un carré magique quelconque; mais leur application exige la décomposition des nombres donnés, leur transcription dans une base de numération différente, la constitution de carrés intermédiaires ou abaques, toutes opérations très longues et par suite peu pratiques, eu égard au résultat à en tirer qui paraît, pour beaucoup d'esprits, un simple amusement arithmétique. Ce n'est pas l'avis des mieux autorisés. Une question qui a vivement interessé des mathématiciens tels qu'Euler et Fermat est certes plus que cela. Elle constitue un chapitre de la Théorie des Nombres; et, à ce titre, un progrès si infime qu'il soit, ne peut être indifférent. En faisant connaître l'ordonnance des nombres dans les carrés magique impairs et par suite, des procédés généraux très-simples pour les construire rapidement et avec la plus grande facilité, je lui apporte ici un modeste appoint. Ce travail n'aura pas été inutile, s'il peut provoquer de nouvelles recherches et contribuer ainsi à la solution complète du problème.

Mars 1908 A. M.

DE

L'ORDONNANCE DES NOMBRES

DANS LES

CARRÉS MAGIQUES IMPAIRS

PREMIÈRE PARTIE

Le problème des carrés magiques consiste, on le sait, à disposer les n^2 termes d'une progression arithmétique quelconque dans un carré uniformément divisé en n^2 cases de façon à obtenir une somme constante, suivant chacune des bandes horizontales et verticales, et aussi suivant chacune des deux diagonales. On pourrait aussi bien adopter n progressions arithmétiques différentes de n termes chacune et obtenir également des carrés magiques. Nous ne considèrerons dans ce travail que la progression arithmétique naturelle constituée par les nombres qui se suivent de 1 à n^2. Le lecteur appliquera aisément ce qui sera indiqué à d'autres séries.

On appelle *base*, *module* ou *racine* d'un carré, le nombre de cases de chacune de ses bandes. Nous supposons que le carré est placé sur une ligne horizontale et nous désignerons simplement ses bandes horizontales et verticales par les expressions *lignes* et *colonnes*. Il ne peut y avoir aucune ambiguité à cet égard.

Soit donc n la base du carré ; celui-ci aura n^2 cases dans lesquelles il s'agit, ainsi qu'il a été dit, de placer les nombres successifs de 1 à n^2 de manière que la somme, dans chacune des lignes,

DE

L'ORDONNANCE DES NOMBRES

DANS LES

CARRÉS MAGIQUES IMPAIRS

(PROCÉDÉS GÉNÉRAUX POUR LEUR CONSTRUCTION IMMÉDIATE)

médianes ont pour somme la constante du carré et qu'il en est de même pour les deux diagonales [1].

Les carrés magiques peuvent être divisés en deux grandes classes : ceux dans lesquels l'ordonnance des nombres est régulière et définie et ceux dans lesquels cette ordonnance n'obéit à aucune règle apparente. Notre programme consiste à étudier les premiers qui sont les plus intéressants et dont on déduit d'ailleurs une grande partie de ces derniers. Ils comprennent une infinité de carrés qui appartiennent à deux types généraux que nous allons successivement examiner.

A). TYPES DE CARRÉS A ORDONNANCE OU DISPOSITION OBLIQUE

Plaçons le premier nombre du groupe fondamental ci-dessus défini dans une quelconque (nous indiquerons tout à l'heure une petite restriction à cet égard) des cases du carré et non située sur la diagonale montante ↗. Inscrivons successivement les nombres de la première ligne de ce groupe dans les cases qui suivent parallèlement à cette diagonale (en d'autres termes, ces nombres suivent *la marche des pions au jeu de dames*). Aussitôt que l'on aura atteint un des bords du carré, on placera provisoirement le nombre suivant, en supposant le carré *reproduit au-delà* de ce bord. Le nombre 4 de la figure 2 se trouve dans ce cas. Ce nombre devra occuper dans le carré une situation identique à celle qu'il possède dans le carré auxi-

[1] Nous désignerons par diagonale *montante* que nous représenterons aussi par le signe ↗ celle qui part du sommet inférieur du carré : l'autre diagonale sera représentée par ↘.

liaire que nous avons supposé et qui est tracé en pointillé sur la même figure.

19	21	3	10	12
25	2	9	11	18
1	8	15	17	24
7	14	16	23	5
13	20	22	4	6

Fig. 2.

Mettons donc ce nombre à la place qu'il doit occuper dans le carré adopté et complétons, comme il a été dit, le placement des nombres de la première ligne du groupe. Le dernier nombre de la première ligne (5 dans le cas de la figure) étant inscrit, nous inscrirons le premier nombre de la ligne suivante, immédiatement au dessous de ce dernier et nous placerons les nombres successifs de cette seconde ligne comme nous l'avons fait pour la première, c'est-à-dire suivant la marche des pions au jeu de dames. Dans le cas de la figure, le nombre 7 tombe dans le carré provisoire de droite, il a été reporté à la place qu'il doit définitivement occuper. Le dernier nombre de la seconde ligne étant placé (c'est le nombre 10 dans notre hypothèse), le premier nombre de la troisième ligne (soit 11) sera inscrit immédiatement au-dessous et l'on continuera à appliquer la règle jusqu'à épuisement de tous les nombres du groupe fondamental adopté. Le carré ainsi constitué sera magique.

Pour bien fixer les idées, nous donnerons comme second exemple, un carré de module 7. On a figuré les carrés latéraux provisoires

afin de faire complètement saisir la méthode. En pratique, il est inutile de les tracer.

	34		45	5	14	16	25	
33	42	44	4	13	15	24	33	
41	43	3	12	21	23	32	41	
49	2	11	20	22	31	40	49	
1	10	19	28	30	39	48		
9	18	27	29	38	47	7	9	
17	26	35	37	46	6	8		
25	34	36	45	5	14	16		
					15			

Fig. 3.

On remarquera, l'observation est importante (et c'est ce que Bachet n'a pas vu, quoiqu'il eut le germe de la méthode), que la *ligne médiane du groupe fondamental occupe la diagonale montante du carré*. C'est la *ligne magique* du groupe. Pour tous les carrés ainsi formés, le point de départ doit être choisi de façon que les nombres de la ligne médiane occupent cette diagonale. Autrement le carré *ne serait pas magique*.

Le premier nombre du groupe doit être inscrit dans une case telle, que, de par le mécanisme adopté pour le placement des nombres, la ligne médiane du groupe foudamental vienne naturellement occuper ladite diagonale. Il suffit pour cela que ce premier nombre soit placé dans une parallèle à cette diagonale dont le rang à compter de cette dernière, soit précisément celui de la ligne magique dans le groupe fondamental.

L'ordre des lignes et des colonnes du groupe fondamental naturel peut être modifié *d'une façon quelconque*. Quelles que soient les per-

mutations que l'on fasse subir aux lignes et aux colonnes du groupe naturel, *toutes les dispositions ainsi obtenues* constituent des *groupes fondamentaux* sur lesquels on peut opérer, comme on l'a fait pour le groupe naturel. Les carrés déduits de tous ces groupes seront magiques à *la condition de toujours placer dans la diagonale montante la ligne magique* du groupe considéré.

L'ordre des lignes du groupe fondamental étant ainsi indifférent, on placera sa première ligne dans une suite quelconque de cases appartenant à une *parallèle* à la dite diagonale. Le dernier nombre de cette ligne se trouvera immédiatement au-dessus d'une case diagonale ou non. Dans le premier cas, on placera au-dessous du dernier nombre inscrit, le premier nombre de la ligne magique du groupe et l'on continuera comme il a été dit : les nombres de cette ligne étant tous placés, on inscrira dans le carré toutes les lignes qui restent conformément à la règle indiquée. Dans le second cas, on opèrera suivant la règle donnée jusqu'à ce que le dernier nombre d'une ligne se trouve immédiatement au-dessus d'une case diagonale; et alors on placera sous ce dernier, le premier nombre de la ligne magique.

Ces explications, un peu longues peut-être, étaient nécessaires pour bien faire comprendre le mécanisme de la méthode. On voit d'ailleurs que l'on peut s'affranchir de toute sujétion en plaçant au premier rang du groupe, les chiffres de sa ligne magique et en inscrivant immédiatement ces chiffres dans la diagonale qu'ils doivent occuper.

Soit comme exemple, le groupe suivant tiré du groupe naturel.

2	4	5	1	3
12	14	15	11	13
17	19	20	16	18
22	24	25	21	23
7	9	10	6	8

Fig. 4

et dans lequel la ligne médiane occupe le second rang. Plaçons tout

d'abord les nombres de cette ligne dans la diagonale montante en partant d'une case quelconque de cette diagonale et nous obtiendrons le carré ci-contre (*fig.* 5).



Fig. 5.

On voit que l'on formera ainsi un très grand nombre de carrés magiques tous différents et dans lesquels on peut faire occuper à un chiffre quelconque, n'appartenant pas à la ligne magique, une quelconque des $n^2 - n = n(n - 1)$ cases n'appartenant pas à la diagonale montante.

La particularité relative à cette ligne magique étant toujours respectée on peut, au lieu de placer le premier nombre d'une ligne immédiatement au-dessous du dernier nombre de la ligne précédente, le placer 2, 3 etc., jusqu'à $(n - 2)$ [1] cases au-dessous et faire l'inscription des nombres d'une même ligne comme il a été dit précédemment. Les carrés obtenus seront tous magiques. On a ainsi $(n - 2)$ *types distincts* de carrés à ordonnance oblique.

Ce carré limite *de degré* $(n - 2)$ présente une *particularité essentielle*. Elle consiste en ce que la *colonne magique* du groupe (c'est la *colonne médiane* du groupe naturel) occupe la *seconde diagonale du carré*.

[1] Les carrés de Bachet appartiennent à ce dernier type.

Le choix de la case de départ, pour le construire, se trouve ainsi limité. Cette case doit être telle que la *case centrale du carré* soit occupée par le *chiffre central ou médian du groupe naturel.*

Dans la pratique, il suffit de disposer le groupe de façon à donner le premier rang à la ligne et à la colonne magiques, tout en plaçant en tête du groupe le nombre central. Ceci fait, on construira le carré en inscrivant le premier nombre du groupe ainsi constitué dans sa case centrale.

Il n'est peut-être pas superflu de faire remarquer que placer un nombre $(n - 2)$ cases au-dessous d'un autre revient à le placer $[n - (n - 2)] = 2$ cases *au-dessus* de ce dernier.

Ce qui précède fait comprendre la singularité des carrés de module 3. Ce sont des carrés limites, c'est-à-dire de degré $(n - 2)$: leurs deux diagonales doivent être occupées par la ligne et la colonne médianes du groupe naturel. Il faut, pour les former, placer ces dernières dans les deux diagonales. On les complètera facilement. La constante des carrés de 3 est 15. Ce module ne fournit donc qu'un *type unique* de carré.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fig. 6

Il n'est pas nécessaire d'écrire le groupe fondamental toutes les fois que l'on se propose de construire un carré. Un peu d'habitude permet de s'en dispenser ; mais pour éviter toute erreur, il est bon de placer dès le début dans la diagonale montante les nombres de la ligne magique du groupe dans l'ordre que l'on veut adopter.

Ci-après, à titre d'exercices quelques exemples de carrés à disposition oblique. Ils corresponden' à des groupes fondamentaux différents qu'il est d'ailleurs aisé de retrouver. Nous nous bornerons au module 7.

6	32	9	42	19	45	22
31	8	41	18	44	28	5
14	40	17	43	27	4	30
39	16	49	26	3	29	13
15	48	25	2	35	12	38
47	24	1	34	11	37	21
23	7	33	10	36	20	46

Fig. 7. — Degré 2

37	15	4	49	34	12	24
18	7	48	33	10	23	36
6	47	31	9	22	39	21
45	30	8	25	42	20	5
29	11	28	41	19	3	44
14	27	40	17	2	43	32
26	38	16	1	46	35	13

Fig. 8. — Degré 3

14	30	48	1	19	39	24
29	47	4	17	42	23	13
45	7	16	41	22	12	32
6	15	40	25	10	35	44
18	38	28	9	34	43	5
37	27	8	33	46	3	21
26	11	31	49	2	20	36

Fig. 9. -- Degré 4.

18	47	8	41	2	35	24
45	11	40	1	34	23	21
14	38	4	33	22	20	40
37	7	31	25	19	43	13
6	30	28	17	46	12	36
29	27	16	49	10	39	5
26	15	48	9	42	3	32

Fig. 10. — Degré $(n - 2) = 5$.

46	15	40	9	34	3	28
21	39	8	33	2	27	45
38	14	32	1	26	44	20
13	31	7	25	43	19	37
30	6	24	49	18	36	12
5	23	48	17	42	11	29
22	47	16	41	10	35	4

Fig. 11 — Degré 5.

Pour placer les chiffres successifs d'une ligne dans le carré, nous avons adopté l'ordonnance oblique vers la droite. On conçoit que l'on peut les disposer obliquement vers la gauche. On obtiendrait ainsi des carrés qui seraient l'image dans un miroir des précédents. On ne peut donc pas les considérer comme distincts. On peut aussi bien disposer ces chiffres en descendant vers la gauche ou la droite ; dans ce cas, le premier nombre d'une ligne devra être placé *au-dessus* du dernier nombre de la ligne précédente. Ces carrés ne sont également pas nouveaux ; on les obtiendrait aussi en faisant tourner les précédents de 180° dans leur plan.

Dans tous les carrés obliques, à l'exception de ceux de degré $(n-2)$, on peut, sans modifier leur ordre relatif, transporter un nombre quelconque de lignes de la partie $\left\{\begin{matrix}\text{supérieure}\\ \text{inférieure}\end{matrix}\right\}$ du carré à sa partie $\left\{\begin{matrix}\text{inférieure}\\ \text{supérieure}\end{matrix}\right\}$, à la condition de transporter ensuite un même nombre de colonnes de la $\left\{\begin{matrix}\text{droite}\\ \text{gauche}\end{matrix}\right\}$ à la $\left\{\begin{matrix}\text{gauche}\\ \text{droite}\end{matrix}\right\}$ de ce carré.

Les carrés ainsi obtenus sont tous magiques, ils appartiennent au type du carré dont ils auront été déduits.

Les carrés à ordonnance oblique peuvent, par ses déplacements de quartiers et autres modifications que l'on trouvera décrits en détail dans l'ouvrage de M. Riollot déjà cité, donner naissance à une foule d'autres combinaisons également magiques, mais dans lesquelles l'ordonnance régulière que nous avons définie se trouve totalement masquée et que l'on ne peut par suite constituer directement. C'est pourquoi on pourrait les appeler *dérivés* par opposition aux premiers que l'on peut qualifier de *primitifs*.

Entre autres modifications que l'on peut faire subir aux carrés à ordonnance oblique, nous nous contenterons de signaler la suivante. Si l'on divise l'un de ces carrés, d'un degré m différent de $(n-2)$, en deux parties par sa diagonale descendante et si, conservant sa position au grand triangle dont l'hypothénuse est constituée par cette diagonale, on fait glisser sur ses colonnes le petit triangle

de façon à l'amener au-dessous du précédent, on obtient un parallélogramme dont toutes les bandes et les diagonales sont magiques. En le redressant, on en fait un carré qui appartient à la catégorie de ceux qui seront décrits ci-après.

Soit à titre d'exemple le carré de module 7 et de degré 3.

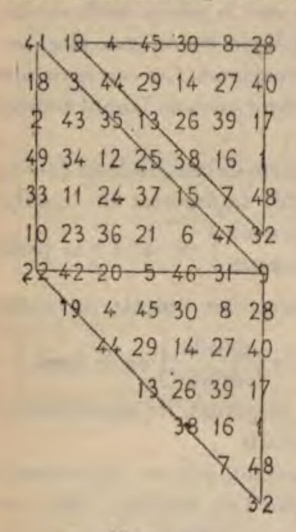


Fig. 12

41	3	35	25	15	47	9
18	43	12	37	6	31	28
2	34	24	21	46	8	40
49	11	36	5	30	27	17
33	23	20	45	14	39	1
10	42	4	29	26	16	48
22	19	44	13	38	7	32

Fig. 13. — Parallélogramme redressé.

B) TYPES DE CARRÉS A ORDONNANCE OU DISPOSITION CAVALIÈRE

Dans ces carrés, les nombres successifs d'une même ligne du groupe suivent une marche analogue à celle du cavalier au jeu des échecs. Dans une première série de carrés, un nombre *b* occupe par rapport à celui *a* qui le précède dans une ligne du groupe, la

position indiquée sur la figure 14. En d'autres termes, les coordon-

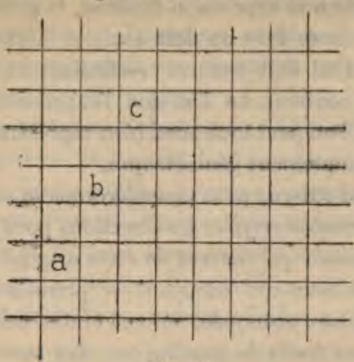


Fig. 14.

nées de b relativement à a dans le carré sont 1 suivant la direction horizontale et 2 suivant la direction verticale. En désignant ces *deux directions* par x et y, on peut représenter la situation de b relativement à a par $(x + 2y)$, étant bien entendu que x et y n'ont aucune valeur quantitative. La position du nombre suivant c, de la même ligne, sera $(x + 2y)$ par rapport à b et $2(x + 2y)$ ou $2x + 4y$ par rapport à a; c'est-à-dire que pour trouver la situation de c à partir de a, il faut avancer de deux cases horizontalement et de quatre cases verticalement.

En général, la position dans un carré de deux nombres successifs du groupe peut être définie par l'expression $(px + qy)$, p et q désignant le nombre de cases dont on doit avancer suivant les directions principales, à partir du premier de ces points, pour trouver la position du second.

Si donc $(px + qy)$ définit l'ordonnance de deux nombres successifs d'une même ligne du groupe fondamental, il faudra multiplier cette expression par 2, 3, 4, etc., pour trouver la position dans le carré des nombres suivants de la même ligne. Chacun de ces facteurs doit affecter en même temps les deux paramètres p et q, les lettres x et y étant seulement, nous le répétons, les *symboles indicatifs des deux*

directions principales. On pourrait à la rigueur s'en dispenser, en convenant que dans une expression binome, le premier terme indique le nombre de cases dont on doit avancer horizontalement et le second, celui dont on doit avancer verticalement. Pour employer des notations très connues, on dira que l'expression est une quantité complexe que l'on peut tout aussi bien représenter par $(p + qi)$, l'addition étant simplement géométrique.

Dans tout ce qui suivra, nous considérerons le sommet inférieur gauche du carré comme *origine*, les directions positives des x et des y étant celles des côtés qui partent de cette origine. Avec cette convention, toutes les cases qui occupent la première ligne du carré (soit sa base) ont pour ordonnées zéro et toutes celles qui occupent sa première colonne (celle de gauche) ont zéro pour abscisses.

Les coefficients de x et de y ne peuvent acquérir que des valeurs entières inférieures à $(n - 1)$. Sitôt qu'un de ces coefficients dépasse cette valeur, la position correspondante se trouve dans un des carrés auxiliaires des fig. 2, 3 et 5. Reporter cette position dans le carré adopté équivaut à déduire n de la valeur de ce coefficient. En d'autres termes, les expressions $(px + qy)$ indicatives de la position d'un nombre dans un carré, sont des *expressions congruentes de module n*.

Ces quelques indications familières d'ailleurs à tout lecteur au courant des plus simples notions mathématiques, nous seront utiles plus loin.

Les nombres successifs d'une même ligne du groupe fondamental, suivent, dans le premier des types que nous étudions maintenant, la marche du cavalier de l'échiquier. Le premier nombre du groupe adopté sera placé dans une *quelconque* des cases du carré et les nombres qui suivent dans la même ligne, disposés comme il est dit (la marche doit toujours être dans le même sens ; celle que nous adoptons a ses deux coordonnées positives, c'est-à-dire vers la droite en montant). Si l'un de ces nombres dépasse les limites du carré et tombe dans l'un des carrés auxiliaires qui l'entourent, on le reportera dans la case identique du carré que l'on se propose de for-

mer, tout comme cela a été fait pour les carrés à ordonnance oblique. Les nombres de la première ligne étant épuisés, on placera *sous le dernier nombre inscrit,* le premier nombre de la ligne suivante et l'on continuera ainsi jusqu'à épuisement de tous les nombres du groupe. Le carré formé sera magique.

Dans les carrés du type qui vient d'être défini, l'ordre des lignes et colonnes du groupe fondamental n'a aucune importance. On peut permuter les lignes ou les colonnes, comme on le voudra, placer le premier nombre du groupe dans une case choisie à volonté, *sans restriction*, le carré à ordonnance cavalière que l'on en déduira sera toujours magique. Ci-après (fig. 15) un exemple tiré du groupe naturel et dont le premier nombre a été placé dans la case $(2x + 2y)$.

	48	9	26		4	21	31
	7	17	34	44	12		39
47	8	25	42	3	20	30	47
6	16	33	43	11	28	38	6
14	24	41	2	19	29	46	14
15	32	49	10	27	37	5	
23	40	1	18	35	45	13	23
31	48	9	26	36	4	21	
39	7	17	34	44	12	22	
	8						

Fig. 15.

On peut, dans ces carrés, opérer une permutation circulaire quelconque des lignes et des colonnes, le carré résultant sera magique. Ceci permet de donner à un nombre quelconque du carré une situation relative déterminée. C'est une conséquence du fait que l'on peut placer le premier nombre du groupe dans une case quelconque arbitrairement choisie.

De telles permutations ne peuvent, on le conçoit à priori, modifier la magie des lignes et des colonnes d'un carré déjà magique. Mais la magie des diagonales peut en être altérée. On vérifiera que dans les carrés du type ici défini, toutes les lignes parallèles aux deux directions diagonales du carré sont aussi magiques. En conséquence, une permutation circulaire des lignes ou des colonnes produira aussi toujours des diagonales magiques. C'est le caractère des *carrés diaboliques*.

Les nombres peuvent suivre aussi la marche du cavalier à gauche. On obtiendrait ainsi des carrés qui seraient l'image dans un miroir des précédents.

On peut également donner aux nombres la marche du cavalier descendant à droite ou à gauche. Dans ce cas le premier nombre d'une ligne sera placé *au-dessus* du dernier nombre de la ligne précédente. Ces derniers carrés seraient identiques aux précédents que l'on aurait fait tourner de 180° dans leur plan.

On obtiendra des nouvelles séries de carrés en donnant aux nombres une marche analogue à celle du cavalier, mais montant de 3, 4... $(n - 2)$ pas, au lieu de 2 ; c'est-à-dire que ses marches seraient représentées par $(x + 3y)$, $(x + 4y)$, ... $[x + (n - 2)y]$. Le pas $(n - 2)$ constitue ici aussi une limite. Ces nouveaux carrés, sauf ceux de la dernière série, peuvent subir une permutation circulaire quelconque de leurs lignes ou de leurs colonnes, sans que leur caractère en soit altéré. En d'autres termes, ce sont aussi des carrés diaboliques.

Les carrés de $(n - 2)$ pas présentent une particularité essentielle, analogue à celle des carrés obliques de la série limite. Les nombres de la *colonne magique* du groupe fondamental doivent occuper une des diagonales du carré. Etant données les directions adoptées pour l'ordonnance des nombres, cette colonne occupera toujours la diagonale descendante. Donc pour construire les carrés de ce type, il faudra placer dans la diagonale descendante, un nombre de la colonne magique du groupe fondamental.

Voici quelques exemples de carrés à ordonnance cavalière.

9	34	3	28	46	15	40
17	42	11	29	5	23	48
25	43	19	37	13	31	7
33	2	27	45	21	39	8
41	10	35	4	22	47	16
49	18	36	12	30	6	24
1	26	44	20	38	14	32

Fig. 16. — Carré de 3 pas.

9	42	19	45	22	6	32
17	43	27	4	30	14	40
25	2	35	12	38	15	48
33	10	36	20	46	23	7
41	18	44	28	5	31	8
49	26	3	29	13	39	16
1	34	11	37	21	47	24

Fig. 17. — Carré de 4 pas.

Carrés de n — 2 = 3 pas

23	5	17	11	9
19	13	10	22	1
6	24	3	20	12
2	16	14	8	25
15	7	21	4	18

Fig. 18.

8	11	20	22	4
19	23	1	10	12
2	9	13	16	25
15	17	24	3	6
21	5	7	14	18

Fig. 19.

Carrés cavaliers de module 7 a n-2 = 5 pas

25	10	44	29	21	6	40
33	18	3	37	22	14	48
41	26	11	45	30	15	7
49	34	19	4	38	23	8
1	42	27	12	46	31	16
9	43	35	20	5	39	24
17	2	36	28	13	47	32

Fig. 20

32	21	10	44	36	6	26
47	39	7	24	30	15	13
27	33	18	14	45	37	1
8	48	40	4	28	31	16
2	22	34	19	11	49	38
17	9	43	41	5	25	35
42	3	23	29	20	12	46

Fig. 21

Afin d'aider le lecteur à reconstituer ces 4 derniers carrés, nous avons souligné les cases où l'on a placé le premier nombre du groupe.

La série des carrés à ordonnance cavalière est loin encore d'être épuisée. Dans les types plus haut définis, on peut placer le premier nombre d'une ligne, non pas immédiatement au-dessous, mais 2, 3.., etc., cases au-dessous du dernier nombre de la ligne précédente. On obtient ainsi des carrés cavaliers de pas et de degrés divers.

13	20	22	4	6
1	8	15	17	24
19	21	3	10	12
7	14	16	23	5
25	2	9	11	18

Fig 22.
Carré limite

Les carrés que l'on peut ainsi constituer sont ceux pour lesquels la *somme du pas et du degré* ne dépasse pas $n - 1$[1] ; et dans le cas où cette somme égale cette limite, les nombres de la colonne magique du groupe doivent occuper la diagonale descendante du carré.

Ci-dessous quelques exemples de carrés cavaliers.

17	42	11	29	5	23	48
33	2	27	45	21	39	8
49	18	36	12	30	6	24
9	34	3	28	46	15	40
25	43	19	37	13	31	7
41	10	35	4	22	47	16
1	26	44	20	38	14	32

Fig. 23
Carré de 5 pas et de degre 4 [2]

46	15	40	9	34	3	28
30	6	24	49	18	36	12
21	39	8	33	2	27	45
5	23	48	17	42	11	29
38	14	32	1	26	44	20
22	47	16	41	10	35	4
13	31	7	25	43	17	37

Fig. 24
Cavalier simple de degré 3

[1] En d'autres termes, cette somme ne peut-être congrue à n, c'est-à-dire égale à zéro.

[2] La régle de la limite n'est pas en défaut, puisque $5 + 4 = 9 \equiv 2$.

Si l'on divise un carré cavalier de $(n-2)$ pas et de degré un, en deux parties par sa diagonale descendante et si l'on transporte le petit triangle supérieur sous le grand triangle limité par cette diagonale, on obtient un parallélogramme qui, redressé, est un cavalier simple magique à deux pas. Il ne faudrait pas en conclure que la division, effectuée sur un carré cavalier simple, donnera toujours un carré cavalier de $(n-2)$ pas.

De nouvelles séries de carrés magiques seront encore fournies par une ordonnance moins simple pour les nombres successifs d'une même ligne du groupe et aussi pour leur degré. Un choix judicieux des paramètres de marche et de ceux du degré donnera toujours un carré magique. Exemples :

4	37	28	12	45	29	20
48	32	16	7	40	24	8
36	27	11	44	35	19	3
31	15	6	39	23	14	47
26	10	43	34	18	2	42
21	5	38	22	13	46	30
9	49	33	17	1	41	25

Fig. 25
Cavalier simple de degré $3x$

9	46	34	15	3	40	28
17	5	42	23	11	48	29
25	13	43	31	19	7	37
33	21	2	39	27	8	45
41	22	10	47	35	16	4
49	30	18	6	36	24	12
1	38	26	14	44	32	20

Fig. 26. — Cavalier de degré un et de marche $(2x + 3y)$

Ce dernier carré (fig. 26) est aussi cavalier de 5 pas et de degré 4 pour un groupe fondamental dans lequel l'ordre de colonne serait 1-5-2-6-3-7-4. Comparer ce carré à celui de la figure 23.

La variété des types dans la catégorie définie en dernier lieu paraît considérable ; mais ils peuvent être souvent ramenés à des types plus simples.

Ce qui précède montre qu'il existe deux séries de marches uni-

formes (oblique et cavalière) qui donnent toujours d'emblée des carrés magiques.

Le fait seul que les nombres d'une ligne du groupe fondamental que l'on considère, ont dans le carré une ordonnance régulière implique également une ordonnance régulière pour les nombres d'une même colonne. Considérons par exemple les carrés cavaliers de $(n - 2)$ pas. Nous savons que leur diagonale est occupée par les nombres de la colonne magique du groupe. Nous pouvons en conclure, ainsi que l'on peut le vérifier, que toute ligne parallèle à cette diagonale est constituée par des nombres appartenant à une même colonne du groupe fondamental.

La règle est générale. La distribution dans le carré des nombres d'une même colonne est étroitement liée à celle des nombres d'une même ligne. On peut, pour chaque type de carré, déterminer cette relation. On vérifiera que dans les carrés obliques, par exemple, les nombres d'une même colonne sont distribués suivant une marche cavalière qui ne varie pas pour toutes les colonnes du groupe ; mais cette marche est *montante vers la gauche*. Le pas du cavalier est égal à la différence entre $(n - 1)$ et le degré du carré oblique considéré.

Dans les carrés cavaliers *non limites*, les nombres d'une même colonne suivent aussi une marche cavalière vers la gauche.

Le lecteur sait maintenant construire avec facilité une infinité de carrés magiques d'un module premier quelconque. Chacun de ces carrés donnera, par l'application des règles de Lucas et autres citées à l'occasion des carrés obliques, naissance à un grand nombre de carrés différents également magiques, mais dans lesquels l'ordonnance primitive des nombres se trouvera complètement bouleversée, au point que souvent il sera difficile sinon impossible de retrouver le carré dont ils ont été déduits.

Nous pensons que l'on peut appeler *dérivés* ou *secondaires* les carrés de cette nature par opposition aux premiers que l'on est justifié à qualifier de *primitifs* ou *réguliers*.

Quelles que soient les permutations que l'on fasse subir aux

lignes d'une part et aux colonnes d'autre part dans le groupe naturel, il est clair qu'une ligne ou une colonne quelconque des groupes résultants est toujours constituée par les mêmes nombres, dont l'ordre seul a varié par suite de ces permutations. Lorsqu'on se trouvera en présence d'un carré magique, il faudra y chercher la suite des nombres d'une même ligne et en étudier la disposition. Il suffira toujours de l'examen de quelques-uns d'entre eux pour en déduire immédiatement sa constitution et voir s'il est primitif ou dérivé.

Il serait intéressant de calculer le nombre de carrés primitifs distincts que l'on peut construire pour chaque module. Nous ne nous arrêterons pas à cette recherche qui ne rentre pas dans le programme que nous nous sommes tracé,

Nous donnerons ici, sur la théorie des procédés décrits, les quelques notions qui nous sont strictement indispensables, pour faciliter l'exposition du chapitre qui suit relatif aux modules composés. Ces notions très simples seront un peu plus développées dans notre seconde partie. Nous engageons toutefois le lecteur qui voudrait les approfondir à consulter « Les Espaces Hypermagiques » de M. G. Arnoux auquel nous les avons empruntées.

Considérons un groupe naturel que nous écrirons en renversant l'ordre des lignes de façon à le lire de bas en haut.

Nous prendrons comme origine le nombre par lequel commence la première ligne. Cette première ligne ou ligne de base sera la direction des x positifs, la première colonne, celle de gauche sera la direction des y positifs. Ce renversement du groupe n'a été opéré que pour faire concorder ces axes avec ceux que nous avions adoptés pour les carrés ; on conçoit qu'il ne modifie nullement tout ce qui a été dit jusqu'ici. Nous désignerons par ξ et η, pour les distinguer, les deux directions principales des carrés.

Afin de préciser nos explications, nous étudierons le groupe de module 5 ; elles s'appliqueront entièrement à un module premier quelconque. Inscrivons donc ce groupe (fig. 27) et supposons-le indéfiniment répété de façon à couvrir uniformément tout le plan. On peut aisément constater qu'une ligne quelconque indéfinie, pas-

sant par deux nombres arbitrairement choisis dans ce groupe, rencontre tout d'abord et dans un certain ordre *n nombres différents* (cinq dans l'exemple choisi), et ces *n* nombres se retrouvent ensuite sur cette ligne, indéfiniment reproduits dans le même ordre. En un mot, cette ligne ne rencontre dans le plan que *n* nombres *différents*. L'hypothèse de la répétition indéfinie du groupe n'a été adoptée que pour bien faire saisir ce point. Nous pourrons bientôt l'abandonner. En effet, lorsque la ligne en question aura dépassé les limites de notre premier groupe, elle rencontrera hors de ces limites un nombre que l'on retrouvera dans ce groupe. Il suffira alors de partir de ce dernier, parallèlement à la direction adoptée pour retrouver les nombres que la ligne indéfinie aurait coupés dans le plan. Quand cette parallèle aura dépassé aussi ces limites, on se retrouvera dans le même cas que précédemment et on continuera l'opération par une troisième parallèle à la direction donnée, et ainsi de suite. Notre groupe originel fournira donc ces *n nombres* et l'on retombera finalement sur le point de départ. Ainsi ce groupe suffit à lui seul pour représenter le plan uniforme que nous avons imaginé. On peut dire qu'il représente ce plan congruent de module *n*.

21 .	22 .	23 .	24 .	25
16 .	17 .	18 .	19 .	20
11 .	12 .	13 .	14 .	15
6 .	7 .	8 .	9 .	10
1 .	2 .	3 .	4 .	5

Fig. 27

Sauf pour les deux *directions principales* x et y (l'expression comprend *toutes les parallèles* à ces deux directions) qui ne jouissent pas de la propriété que nous allons indiquer, on peut vérifier que la *somme des n nombres* différents rencontrés par *une direction quelconque* est *magique*. Le groupe fondamental est donc magique pour toutes ses directions autres que les deux principales.

Adoptons donc deux directions quelconques partant de l'origine du groupe et *différentes* de celles des deux axes ; elles sont magiques. Inscrivons respectivement sur les axes ξ et η du carré et dans l'ordre où ils se présentent, les nombres rencontrés par chacune de ces deux directions. Nous avons ainsi les éléments suffisants pour la formation d'un carré.

Soient, par exemple, les deux directions déterminées par les nombres 1 et 8, d'une part et 1 et 12, d'autre part. Inscrivons (fig. 28) les nombres 1, 8, 15, 17 et 24 rencontrés par la première direction sur l'axe ξ et 12, 23, 9 et 20 rencontrés par la seconde sur l'axe η du carré. Ceci fait, prenons dans le groupe une ligne partant du nombre 12 et parallèle à la ligne (1, 8) de ce groupe; elle rencontrera les nombres 19, 21, 3 et 10 que nous inscrirons dans le carré sur la bande horizontale à l'origine de laquelle le nombre 12 a été placé. Ces cinq nombres ont aussi une somme magique. Pour former la troisième ligne du carré, on tracera dans le groupe une nouvelle ligne parallèle à (1, 8) et partant du nombre 23 et ainsi de suite jusqu'à ce que le carré soit complètement rempli. Les nombres ainsi rencontrés par chacune des lignes sont tous différents; ce seront donc les n^2 nombres du groupe. Au lieu de construire le carré au moyen de lignes parallèles à (1, 8) dans le groupe, on aurait tout aussi bien pu le former en adoptant des lignes parallèles à (1, 12) et partant de chacun des nombres inscrits à la base du carré. L'ordonnance des nombres du carré n'en aurait pas été modifiée.

20	22	4	6	13
9	11	18	25	2
23	5	7	14	16
12	19	21	3	10
1	8	15	17	24

Fig. 28

Les notations adoptées permettent de définir les lignes et colonnes de ce carré par les deux relations

$$\xi = 2x + y,$$
$$\eta = x + 2y.$$

La diagonale montante sera par suite représentée par

$$\xi + \eta = 3x + 3y$$

et la diagonale descendante par

$$\eta - \xi = -x + y;$$

ces deux lignes sont aussi magiques, puisqu'elles ne sont pas parallèles aux axes du groupe.

Le carré est donc magique. Il a pour marche $4\xi + 3\eta$ et pour degré $(2\xi + 2\eta)$. Sa diagonale montante est constituée par les nombres de la diagonale montante du groupe, pris de 3 en 3.

Si l'on veut déterminer directement les nombres de la diagonale descendante, on constatera que l'on connaît deux nombres de cette diagonale; ce sont les nombres 24 et 20 occupant les cases extrêmes des deux axes du carré : on pourra donc partir de l'un d'eux pour retrouver tous les autres.

La méthode, on le voit, est des plus simples. La solution exacte du problème dépend du choix judicieux des paramètres des deux équations fondamentales.

En général pour que deux équations

$$\xi = ax + by \quad \text{et} \quad \eta = a'x + b'y$$

puissent donner un carré magique, il faut que le déterminant $(ab' - ba')$ de leurs paramètres soit *premier avec le module n* du groupe adopté.

Nous savons que ces deux équations sont des congruences de module n; mais on peut sans inconvénient substituer le signe $=$ de l'égalité à celui $\equiv$ adopté pour les congruences, la confusion n'étant pas ici possible.

Les deux équations fondamentales ci-dessus permettent de résoudre un très-grand nombre de problèmes relatifs aux carrés magiques. Nous y reviendrons dans la seconde partie. Nous proposerons cependant, à titre d'exercice, les suivants dont la solution est aisée à trouver :

1° Etant donné un nombre du groupe fondamental naturel, quelle case occupera-t-il dans le carré?

2° Inversement, un nombre occupant une case donnée du carré, quelle est sa situation dans ce groupe?

3° Etant données deux directions déterminant un carré magique, quel est la nature de ce carré; en d'autres termes, quelle est l'or-

donnance dans le carré, des nombres successifs d'une ligne ou d'une colonne du groupe fondamental et quel est son degré ?

4° Etant donné un type de carré régulier, déterminer les paramètres des deux directions principales qui correspondent à ce type.

Pour terminer ce chapitre, nous donnons ci-après quelques exemples de carrés que le lecteur pourra multiplier à son gré. Nous devons toutefois le prévenir que si une erreur s'était glissée dans la transcription ou l'impression de quelques chiffres, il pourra, connaissant le mode de génération indiqué pour chacun de ces carrés, la rectifier facilement.

Carrés à ordonnance oblique de module 11 :

Nous en donnons quatre. Les trois premiers sont déduits du groupe naturel dont on a simplement transporté la ligne magique au premier rang. Le dernier, de degré $9 = n - 2$ est déduit du même groupe dans lequel on a fait une permutation des lignes en en transportant les cinq premières au dernier rang.

Module 11 : *Constante* $= 671$

26	74	100	5	42	79	116	21	47	95	66
73	110	4	41	78	115	20	46	94	65	25
109	3	40	88	114	19	45	93	64	24	72
2	39	87	113	18	55	92	63	23	71	108
38	86	112	17	54	91	62	33	70	107	1
85	111	16	53	90	61	32	69	106	11	37
121	15	52	89	60	31	68	105	10	36	84
14	51	99	59	30	67	104	9	35	83	120
50	98	58	29	77	103	8	34	82	119	13
97	57	28	76	102	7	44	81	118	12	49
56	27	75	101	6	43	80	117	22	48	96

Fig. 29. — Oblique de degré 4.

22	36	72	97	111	4	29	54	79	104	63
35	71	96	121	3	28	53	78	103	62	21
70	95	120	2	27	52	88	102	61	20	34
94	119	1	26	51	87	101	60	19	44	69
118	11	25	50	86	100	59	18	43	68	93
10	24	49	85	110	58	17	42	67	92	117
23	48	84	109	57	16	41	77	91	116	9
47	83	108	56	15	40	76	90	115	8	33
82	107	66	14	39	75	89	114	7	32	46
106	65	13	38	74	99	113	6	31	45	81
64	12	37	73	98	112	5	30	55	80	105

Fig. 30. — Carré oblique de degré 6.

79	32	117	70	12	108	50	3	99	41	60
31	116	69	22	107	49	2	98	40	59	78
115	68	21	106	48	1	97	39	58	88	30
67	20	105	47	11	96	38	57	87	29	114
19	104	46	10	95	37	56	86	28	113	77
103	45	9	94	36	66	85	27	112	76	18
55	8	93	35	66	84	26	111	75	17	102
7	92	34	64	83	25	121	74	16	101	54
91	44	63	82	24	120	73	15	100	53	6
43	62	81	23	119	72	14	110	52	5	90
61	80	33	118	71	13	109	51	4	89	42

Fig. 31. — Carré oblique de degré 8.

116	45	106	35	96	25	86	15	76	5	66
55	105	34	95	24	85	14	75	4	65	115
104	44	94	23	84	13	74	3	64	114	54
43	93	33	83	12	73	2	63	113	53	103
92	32	82	22	72	1	62	112	52	102	42
31	81	21	71	11	61	111	51	101	41	91
80	20	70	10	60	121	50	100	40	90	30
19	69	9	59	120	49	110	39	89	29	79
68	8	58	119	48	109	38	99	28	78	18
7	57	118	47	108	37	98	27	88	17	67
56	117	46	107	36	97	26	87	16	77	6

Fig. 32. — Carré oblique de degré 9.

Module 13 : *Constante* = 1105.

99	3	115	19	118	35	134	51	150	54	166	70	91
2	114	18	130	34	133	50	149	53	165	69	90	98
113	17	129	33	132	49	148	65	164	68	89	97	1
16	128	32	131	48	147	64	163	67	88	96	13	112
127	31	143	47	146	63	162	66	87	95	12	111	15
30	142	46	145	62	161	78	86	94	11	110	14	126
141	45	144	61	160	77	85	93	10	109	26	125	29
44	156	60	159	76	84	92	9	108	25	124	28	140
155	59	158	75	83	104	8	107	24	123	27	139	43
58	157	74	82	103	7	106	23	122	39	138	42	154
169	73	81	102	6	105	22	121	38	137	41	153	57
72	80	101	5	117	21	120	37	136	40	152	56	168
79	100	4	116	20	119	36	135	52	151	55	167	71

Fig. 33. — Oblique degré 2.

113	31	144	75	6	119	50	163	94	25	138	56	91
30	156	74	5	118	49	162	93	24	137	55	90	112
155	73	4	130	48	161	92	23	136	54	89	111	29
72	3	129	47	160	104	22	135	53	88	110	28	154
2	128	46	159	103	21	134	65	87	109	27	153	71
127	45	158	102	20	133	64	86	108	39	152	70	1
44	157	101	19	132	63	85	107	38	151	69	13	126
169	100	18	131	62	84	106	37	150	68	12	125	43
99	17	143	61	83	105	36	149	67	11	124	42	168
16	142	60	82	117	35	148	66	10	123	41	167	98
141	59	81	116	34	147	78	9	122	40	166	97	15
58	80	115	33	146	77	8	121	52	165	96	14	140
79	114	32	145	76	7	120	51	164	95	26	139	57

Fig. 34. — Oblique de degré 5.

30	73	129	159	20	63	106	149	10	40	96	139	91
72	128	158	19	62	105	148	9	52	95	138	90	29
127	157	18	61	117	147	8	51	94	137	89	28	71
169	17	60	116	146	7	50	93	136	88	27	70	126
16	59	115	145	6	49	92	135	87	39	69	125	168
58	114	144	5	48	104	134	86	38	68	124	167	15
113	156	4	47	103	133	85	37	67	123	166	14	57
155	3	46	102	132	84	36	66	122	165	26	56	112
2	45	101	131	83	35	78	121	164	25	55	111	154
44	100	143	82	34	77	120	163	24	54	110	153	1
99	142	81	33	76	119	162	23	53	109	152	13	43
141	80	32	75	118	161	22	65	108	151	12	42	98
79	31	74	130	160	21	64	107	150	11	41	97	140

Fig. 35. — Oblique de degré 9.

Les carrés ci-après sont à ordonnance cavalière tirés du groupe naturel. Sauf pour les carrés limites, l'unité a été placée dans la case origine. Le rapprochement et la comparaison de ces carrés donnent des conclusions interessantes qui peuvent aussi être déduites des deux équations fondamentales.

9	26	36	4	21	31	48
17	34	44	12	22	39	7
25	42	3	20	30	47	8
33	43	11	28	38	6	16
41	2	19	29	46	14	24
49	10	27	37	5	15	32
1	18	35	45	13	23	40

Fig. 36
Cavalier simple de degré 1

33	42	44	4	13	15	24
9	18	27	29	38	47	7
41	43	3	12	21	23	32
17	26	35	37	46	6	8
49	2	11	20	22	31	40
25	34	36	45	5	14	16
1	10	19	28	30	39	48

Fig. 37
Cavalier de 2 pas et de degré 2

33	18	3	37	22	14	48
9	43	35	20	5	39	24
41	26	11	45	30	15	7
17	2	36	28	13	47	32
49	34	19	4	38	23	8
25	10	44	29	21	6	40
1	42	27	12	46	31	16

Fig. 38
Cavalier de 3 pas et de degré 2.

4	21	31	48	9	26	36
29	46	14	24	41	2	19
12	22	39	7	17	34	44
37	5	15	32	49	10	27
20	30	47	8	25	42	3
45	13	23	40	1	18	35
28	38	6	16	33	43	11

Fig. 39
Cavalier de 4 pas et de degré 2.

4	30	14	40	17	43	27
20	46	23	7	33	10	36
29	13	39	16	49	26	3
45	22	6	32	9	42	19
12	38	15	48	25	2	35
28	5	31	8	41	18	44
37	21	47	24	1	34	11

Fig. 40

Cavalier de 2 pas et de degré 4

4	13	15	24	33	42	44
37	46	6	8	17	26	35
28	30	39	48	1	10	19
12	21	23	32	41	43	3
45	5	14	16	25	34	36
29	38	47	7	9	18	27
20	22	31	40	49	2	11

Fig. 41

Cavalier de 3 pas et de degré 3

37	110	51	113	65	6	68	20	82	23	96
73	14	87	28	90	42	104	45	118	59	11
109	50	112	64	5	67	19	81	33	95	36
13	86	27	89	41	103	55	117	58	10	72
49	111	63	4	77	18	80	32	94	35	108
85	26	99	40	102	54	116	57	9	71	12
121	62	3	76	17	79	31	93	34	107	48
25	98	39	101	53	115	56	8	70	22	84
61	2	75	16	78	30	92	44	106	47	120
97	38	100	52	114	66	7	69	21	83	24
1	74	15	88	29	91	43	105	46	119	60

Fig. 42

Cavalier simple de degré 4.

37	14	112	89	77	54	31	8	106	83	60
73	50	27	4	102	79	56	44	21	119	96
109	86	63	40	17	115	92	69	46	23	11
13	111	99	76	53	30	7	105	82	59	36
49	26	3	101	78	66	43	20	118	95	72
85	62	39	16	114	91	68	45	33	10	108
121	98	75	25	29	6	104	81	58	35	12
25	2	100	88	65	42	19	117	94	71	48
61	38	15	113	90	67	55	32	9	107	84
97	74	51	28	5	103	80	57	34	22	120
1	110	87	64	41	18	116	93	70	47	24

Fig. 43. — Cavalier de 3 pas et de degré 4.

37	50	63	76	78	91	104	117	9	22	24
73	86	99	101	114	6	19	32	34	47	60
109	111	3	16	29	42	55	57	70	83	96
13	26	39	52	65	67	80	93	106	119	11
49	62	75	88	90	103	116	8	21	23	36
85	98	100	113	5	18	31	44	46	59	72
121	2	15	28	41	54	56	69	82	95	108
25	38	51	64	77	79	92	105	118	10	12
61	74	87	89	102	115	7	20	33	35	48
97	110	112	4	17	30	43	45	58	71	84
1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120

Fig. 44. — Cavalier de 4 pas et de degré 4.

37	86	3	52	90	18	56	105	33	71	120
73	111	39	88	5	54	92	20	58	107	24
109	26	75	113	41	79	7	45	94	22	60
13	62	100	28	77	115	43	81	9	47	96
49	98	15	64	102	30	68	117	34	83	11
85	2	51	89	17	66	104	32	70	119	36
121	38	87	4	53	91	19	57	106	23	72
25	74	112	40	78	6	55	93	21	59	108
61	110	27	76	114	42	80	8	46	95	12
97	14	63	101	29	67	116	44	82	10	48
1	50	99	16	65	103	31	69	118	35	84

Fig. 45. — Carré de 5 pas et de degré 4.

109	14	51	88	114	30	56	93	9	35	72
85	111	27	64	90	6	43	69	106	22	48
61	98	3	40	77	103	19	45	82	119	24
37	74	100	16	53	79	116	32	58	95	11
13	50	87	113	29	66	92	8	34	71	108
121	26	63	89	5	42	68	105	21	47	34
97	2	39	76	102	18	55	81	118	23	60
73	110	15	52	78	115	31	57	94	10	36
49	86	112	28	65	91	7	44	70	107	12
25	62	99	4	41	67	104	20	46	83	120
1	38	75	101	17	54	80	117	33	59	96

Fig. 45. — Cavalier de 4 pas et de degré 5.

6	19	32	34	47	60	73	86	99	101	114
103	116	8	21	23	36	49	62	75	88	90
79	92	105	118	10	12	25	38	51	64	77
66	68	81	94	107	120	1	14	27	40	53
42	55	57	70	83	96	109	111	3	16	29
18	34	44	46	59	72	85	98	100	113	5
115	7	20	33	35	48	61	74	87	89	102
91	104	117	9	22	24	37	50	63	76	78
67	80	93	106	119	11	13	26	39	52	65
54	56	69	82	95	108	121	2	15	28	41
30	43	45	58	71	84	97	110	112	4	17

Fig. 47. — Cavalier de 5 pas de degré 5.

6	80	44	118	71	24	109	62	15	89	53
42	116	69	33	107	60	13	98	51	4	78
67	31	105	58	22	96	49	2	87	40	114
103	56	20	94	47	11	85	38	112	76	29
18	92	45	9	83	36	121	74	27	101	65
54	7	81	34	119	72	25	110	63	16	90
79	43	117	70	23	108	61	14	99	52	5
115	68	32	106	59	12	97	50	3	88	41
30	104	57	21	95	48	1	86	39	113	77
66	19	93	46	10	84	37	111	75	28	102
91	55	8	82	35	120	73	26	100	64	17

Fig. 48. — Cavalier de 6 pas et de degré 4.

671

CHAPITRE DEUXIÈME

—

CARRÉS MAGIQUES IMPAIRS DE MODULES NON PREMIERS

L'application des méthodes précédentes à des groupes naturels de modules non premiers donne souvent des carrés *partiellement* magiques ; mais la magie complète ne peut être obtenue que dans quelques cas. En effet, un groupe fondamental de module impair composé étant donné, une *ligne quelconque*, inclinée sur les deux axes de ce groupe, ne rencontre plus toujours n points différents.

Si les paramètres a et b d'une direction $\xi = ax + b$ sont premiers avec le module n du groupe, cette direction passe par n points distincts appartenant chacun à des lignes et à des colonnes différentes ; elle sera magique.

Si un seul des deux paramètres a par exemple est premier avec n et que l'autre ne l'est pas, les ordonnées des divers nombres rencontrés par la direction considérée ne sont pas toutes différentes ; cependant leurs abscisses le seront, de sorte que cette direction passe bien aussi par n points différents ; mais on ne peut pas affirmer qu'elle sera magique ; et, en fait, quelques-unes seulement des lignes qu'elle détermine présenteront la magie cherchée.

Si a et b ont un facteur commun δ avec le module n, c'est-à-dire si $n = \delta p$, la direction $ax + by$ ne rencontrera plus que p points différents, de sorte que la formation du carré magique avec cette direction devient impossible.

On comprend ainsi pourquoi un carré magique de module non premier n'est pas aussi aisé à constituer que les autres. Un groupe quelconque ne donne pas tous les types de carrés précédemment décrits. On devra tout d'abord écarter tous ceux, obliques ou cavaliers, dont le degré n'est pas premier avec le module ; car en procédant à leur construction, on serait amené à placer un nombre dans une case déjà occupée.

Une condition essentielle pour la possibilité du carré est que le déterminant $(ab' - ba')$ des deux directions principales soit différent de zéro (si ce déterminant était nul, les deux directions ne seraient pas distinctes) et premier avec le module. Il faut de plus que, dans chacune des deux équations, les deux paramètres ne soient pas *en même temps* non premiers avec le module.

Pour certains groupes, ces conditions sont suffisantes.

En général, si les quatre paramètres, ainsi que leur déterminant, sont premiers avec le module, on obtient des carrés dont les lignes et les colonnes sont magiques ; mais ces conditions n'assurent pas la magie des deux diagonales. Il faut que les deux équations donnent aussi des diagonales magiques, et souvent les sommes $\xi + \eta$ et $\eta - \xi$ qui les déterminent, ont un de leurs paramètres non premier avec le module, ce qui, nous l'avons vu, peut altérer leur magie.

Soit comme exemple, le groupe naturel de module 9 ; la somme magique est 369.

Soient

$$\xi = -x + 2y \quad \text{et} \quad \eta = x - y$$

les équations des deux directions principales adoptées pour la constitution du carré ; leurs paramètres et leur déterminant sont premiers avec le module. Mais d'autre part on a

$$\xi + \eta = y \quad \text{et} \quad \eta - \xi = 2x - 3y.$$

Donc la diagonale montante sera constituée par une colonne du groupe ; cette colonne est nécessairement la médiane, puisqu'elle est seule magique.

La diagonale descendante, qui est fonction du paramètre 3, varie suivant le nombre que l'on place à l'origine du carré.

En inscrivant successivement dans cette origine tous les nombres de la colonne médiane, on constate que seuls les nombres 5, 32 et 59 (espacés de trois en trois) rendent magique la diagonale considérée. Ainsi la direction $(2x - 3y)$ n'est magique que pour certaines de ses lignes.

Soit comme second exemple, les deux directions

$$\xi = -x + 2y \qquad \eta = 5x - 2y$$

le déterminant $ab' - ba' = -8$ ou, ce qui revient au même, égal à l'unité, puisqu'on peut, sans altérer nos quantités leur ajouter un multiple quelconque du module.

Les deux diagonales seront définies par

$$\xi + \eta = 4x \quad \text{et} \quad \eta - \xi = 6x - 4y.$$

Ici, la diagonale montante est constituée par les nombres de la ligne magique du groupe (pris avec un intervalle de 4). On peut vérifier que les nombres 37, 40 et 43 seuls de cette ligne placés à l'origine du carré, assurent la magie de la diagonale descendante.

Soient encore les deux directions

$$\xi = 5x + 4y \quad \text{et} \quad \eta = x + y$$

de groupe naturel, on a

$$ab' - ba' = 1$$

$$\xi + \eta = 6x + 5y \qquad \eta - \xi = -4x - 3y = 5x + 6y.$$

Les nombres 20, 47 et 74 de la deuxième colonne, 23, 50 et 77 de la cinquième et 26, 53 et 80 de la huitième, placés dans la case origine rendent magiques les deux diagonales.

On remarquera que ces nombres présentent des intervalles de 3 en ligne et en colonne.

Les restrictions qui précèdent ne sont plus applicables lorsque le

groupe naturel subit une transformation convenable. Dans ce cas, à la condition seule que le déterminant des paramètres soit premier avec le module, les équations de deux directions quelconques inclinées sur les axes du groupe *et passant chacune par n points différents*, donneront des carrés magiques. On devra vérifier que les diagonales aussi passent par n points différents (nous avons vu qu'il suffit pour cela que les deux paramètres de leurs directions ne soient pas en même temps non premiers avec le module).

Il en est ainsi du groupe ci-dessous

64	65	66	68	69	67	72	70	71
55	56	57	59	60	58	63	61	62
73	74	75	77	78	76	81	79	80
28	29	30	32	33	31	36	34	35
46	47	48	50	51	49	54	52	53
37	38	39	41	42	40	45	43	44
19	20	21	23	24	22	27	25	26
10	11	12	14	15	13	18	16	17
1	2	3	5	6	4	9	7	8

Fig. 49

Appliquons-lui les équations [1]

$$\xi = 8x + y \qquad \eta = 5x + 2y$$

pour lesquels on a

$$ab' - ba' = 11.$$

[1] On remarquera qu'une direction inclinée *quelconque* dans le groupe rencontrera toujours neuf nombres dont la somme sera magique, quoique tous ces nombres ne soient pas toujours différents. Cette remarque paraît intéressante.

Les diagonales ont pour équations

$$\xi + \eta = 4x + 3y \qquad \eta - \xi = -3x + y = 6x + y$$

On obtient le carré magique ci-après

60	68	3	11	19	44	52	36	76
35	79	63	67	6	14	21	38	46
41	48	29	73	62	70	9	13	24
16	27	40	51	32	75	56	64	8
66	2	10	26	43	54	31	78	59
81	58	69	5	12	20	37	53	34
47	28	80	61	72	4	15	23	39
22	42	50	30	74	55	71	7	18
1	17	25	45	49	33	77	57	65

Fig. 50

Il a pour marche $\xi + 4\eta$ et pour degré $3\xi - \eta$. On peut permuter circulairement ses lignes et ses colonnes sans altérer sa magie. Ces mêmes équations ne donnent des carrés avec le groupe naturel que si l'on place dans la case origine les nombres 10, 37, 64; 13, 40, 67 et 16, 43, 70.

Appliquons encore à ce groupe transformé les équations

$$\xi = 5x + 4y \qquad \eta = x + y$$

et par suite

$$\xi + \eta = 6x + 5y \qquad \eta - \xi = 5x + 6y$$

qui, avec le groupe naturel ne donnent, on l'a vu plus haut, que quelques carrés. Nous obtiendrons le carré magique *fig.* 51 de

marche $\xi + 5\eta$ et de degré 8 (voir la note insérée en renvoi de la figure 23).

71	42	55	22	74	18	30	7	50
61	23	80	15	28	4	47	72	39
81	12	34	5	53	69	37	58	20
31	2	54	66	43	59	26	78	10
51	64	40	56	27	75	16	32	8
41	62	24	73	13	29	9	48	70
21	79	14	35	6	46	67	38	63
11	36	3	52	68	44	60	19	76
1	49	65	45	57	25	77	17	33

Fig. 51.

Il est également diabolique.

Ainsi donc, pour pouvoir constituer à coup sûr des carrés magiques de modules composés, il faut au préalable faire subir certains changements au groupe naturel, changements consistant à modifier *l'arrangement* de ses lignes et de ses colonnes.

Les groupes naturels de modules composés présentent de multiples directions non magiques. Si, par la décomposition des nombres qui les constituent (tel qu'un changement de base de numération, par exemple), on rend ces directions apparentes et si, après cela, on parvient, par des permutations convenables, à les réduire aux seules directions horizontale et verticale, le groupe résultant acquerra toutes les propriétés des groupes de modules premiers ; il fournira ainsi une grande variété de carrés magiques.

Le problème des carrés magiques de modules composés réside tout entier dans cette modification du groupe naturel. On trouvera dans l'ouvrage de M. Arnoux quelques méthodes pour y parvenir. Elles sont malheureusement trop laborieuses, même pour le module 9

qui est le plus faible de ceux à considérer. Les lois qui régissent ces modifications étant déterminées, la construction de carrés magiques de modules quelconques *pairs ou impairs* ne présenterait plus aucune difficulté. On trouvera dans la Note II insérée à la fin de la deuxième partie, une solution nouvelle de la question.

Un groupe fondamental transformé étant connu, on pourra lui faire subir une permutation circulaire quelconque sans en altérer les propriétés. On en obtiendra en outre un nombre $\varphi(n)$ (¹).

Ainsi dans le groupe donné ci-dessus et dont nous n'inscrivons ici que la première ligne.

(1)	1	2	3	5	6	4	9	7	8

prenons successivement la suite des colonnes de deux en deux, nous obtiendrons cinq nouveaux groupes dont les premières lignes sont

(2)	1	3	6	9	8	2	5	4	7
(3)	1	6	8	5	7	3	9	2	4
(4)	1	8	7	9	4	6	5	3	2
(5)	1	7	4	5	2	8	9	6	5
(6)	1	4	2	9	3	7	5	8	6

On ne peut aller plus loin, car on retrouve le groupe (1). On pourrait penser prendre la suite des colonnes de 5 en 5, de 7 en 7 (en un mot suivant des nombres premiers avec le module), on retrouverait les mêmes séries.

Nous donnerons encore quelques exemples de carrés déduits du groupe (1) qui nous a déjà servi.

Carré cavalier simple

$$\xi = 3x + 2y \qquad \eta = 8x + 8y$$

(¹) On sait que $\varphi(n)$ que l'on appelle l'indicateur de n, représente le nombre de nombres inférieurs à n et premiers avec lui.

et : $\xi + \eta = 2x + y \qquad \eta - \xi = 5x + 6y.$

11	42	34	56	6	25	47	78	70
21	49	80	66	13	44	30	58	8
41	36	55	5	27	46	77	72	10
51	79	65	15	43	29	60	7	20
31	62	3	22	53	75	67	17	39
81	64	14	45	28	59	9	19	50
61	2	24	52	74	69	16	38	33
71	12	40	35	57	4	26	48	76
1	23	54	73	68	18	37	32	63

Fig. 52.

Carré cavalier de degré 1 *et de marche* $\xi + 3\eta$.

Ses équations sont :

$$\xi = 4x + 3y \qquad \eta = 8x + 8y$$

et par suite

$$\xi + \eta = 3x + 2y \qquad \eta - \xi = 4x + 5y.$$

11	49	55	15	53	59	16	48	63
21	36	65	22	28	69	26	32	70
41	79	3	45	74	4	37	78	8
51	62	14	52	57	18	47	58	10
31	64	24	35	68	25	30	72	20
81	2	40	73	6	44	77	7	39
61	12	54	56	13	46	60	17	50
71	23	34	66	27	29	67	19	33
1	42	80	5	43	78	9	38	76

Fig. 53.

On remarquera la corrélation entre ces deux carrés. Leurs colonnes sont constituées par les mêmes nombres et les lignes de ce dernier sont constituées par les nombres occupant les parallèles aux diagonales descendantes du carré *fig.* 52.

Carré cavalier de degré 1 *et de marche* $\xi + 4\eta$.

$$\xi = 5x + 4y \qquad \eta = 8x + 8y$$

d'où :

$$\xi + \eta = 4x + 3y$$

et :

$$\eta - \xi = 3x + 4y.$$

11	36	3	52	68	44	60	19	76
21	79	14	35	6	46	67	38	63
41	62	24	73	13	29	9	48	70
51	64	40	56	27	75	16	32	8
31	2	54	66	43	59	26	78	10
81	12	34	5	52	69	37	58	20
61	23	80	15	28	4	47	72	39
71	42	55	22	74	18	30	7	50
1	49	65	45	57	25	77	17	33

Fig. 54.

Ce carré se déduit aussi du précédent suivant la même loi. On ferait la même constatation pour les carrés de marche $(\xi + 5\eta)$ et de marche $(\xi + 6\eta)$. Il est inutile de les construire. Nous nous contentons d'en indiquer les équations qui sont

$$\xi = 6x + 5y \qquad \eta = 8x + 8y$$

pour les premiers, et

$$\xi = 7x + 6y \qquad \eta = 8x + 8y$$

pour les seconds.

Passons maintenant au carré cavalier de marche $\xi + 7\eta$; c'est le dernier de la série. On ne peut plus placer un nombre quelconque du groupe dans une case quelconque. Le fait que la colonne magique doit occuper la diagonale descendante, limite le chiffre de cases dans lesquelles on peut placer le premier nombre pour constituer le carré magique.

Ci-après *fig.* 55 le carré obtenu en plaçant le nombre 68, appartenant à la colonne magique, dans la case supérieure de gauche.

68	75	47	19	8	61	36	40	15
6	59	30	38	10	71	79	54	22
13	69	77	48	20	1	62	34	45
27	4	60	32	39	11	64	80	52
43	18	67	78	50	21	2	55	35
53	25	9	58	33	41	12	65	73
28	44	16	72	76	51	23	3	56
74	46	26	7	63	31	42	14	66
57	29	37	17	70	81	49	24	5

Fig. 55

On constatera la persistance de la loi indiquée. Dans tous ces carrés cavaliers, les colonnes sont constituées par les mêmes nombres disposés dans le même ordre. Les équations correspondant à ce dernier carré sont :

$$\xi = 8x + 7y \qquad \text{et} \qquad \eta = 8x + 8y.$$

La diagonale descendante $\eta - \xi = y$ est donc bien constituée par la colonne magique du groupe.

Ce groupe transformé fournirait également des carrés à ordonnance oblique de divers degrés. On peut aussi, comme pour les modules premiers, en tirer des cavaliers à ordonnance et degré de la forme $(\alpha\xi + \beta\eta)$.

Ainsi le carré magique

60	68	3	11	19	44	52	36	76
53	79	63	67	6	14	21	38	46
41	48	29	73	62	70	9	13	24
16	27	40	51	32	75	56	64	8
66	2	10	26	43	54	31	78	59
81	58	69	5	12	20	37	53	34
47	28	80	61	72	4	15	23	39
22	42	50	30	74	55	71	7	18
1	17	15	45	49	33	77	57	65

Fig. 56.

a pour marche $(\xi + 4\eta)$ et pour degré $(3\xi - \eta)$. Les équations correspondantes sont

$$\xi = 8x + y \qquad \eta = 5x + 2y$$

d'où :

$$\xi + \eta = 4x + 3y \qquad \eta - \xi = -3x + y = 6x + y.$$

On voit donc que la variété des carrés fournis par un groupe transformé est très grande. Mais il n'est pas possible de former tous les types de carrés que peuvent donner les groupes de modules premiers. Il y a à cela un obstacle résultant de la nature même du module. On ne pourra jamais constituer un carré dont le degré ne serait pas premier avec le module. Voilà donc une restriction importante et par suite, une réduction du nombre de types que l'on pourrait concevoir à priori.

Les développements qui précèdent montrent suffisamment la nature des difficultés auxquelles on se heurte dans la construction des carrés magiques de modules non premiers. Une transformation convenable du groupe naturel fait, nous l'avons montré, disparaître ces difficultés. Mais le groupe naturel et ceux qui s'en déduisent, par permutations circulaires et autres, ne doivent pas, on l'a vu par

de nombreux exemples, être abandonnés. Ils fournissent aussi de nombreux carrés magiques de types divers.

En s'imposant comme condition que les paramètres des deux directions qui doivent constituer les directions principales du carré soient premiers avec le module (avec bien entendu la condition évidente que le déterminant $ab' - ba'$ soit aussi premier avec ce module), on peut aisément établir que, pour le module 9, les seuls carrés magiques possibles à ordonnance oblique sont ceux des degrés 1, 4 et 7 ; et l'on en construira un très-grand nombre.

Ci-après un exemple pour chacun d'eux. Les deux premiers (fig. 57 et 58), sont déduits du groupe naturel, dans lequel la ligne médiane a été portée au premier rang.

Carré oblique de degré 1

$$\xi = 2x + y \qquad \eta = 8x + 8y$$

d'où

$$\xi + \eta = x \quad \text{et} \quad \eta - \xi = 6x + 7y.$$

La diagonale descendante ne sera pas nécessairement magique ; il faut, pour sa magie, qu'elle ne comprenne que des nombres appartenant exclusivement aux colonnes 2, 5 et 8.

2	13	24	35	46	57	68	79	45
12	23	34	54	56	67	78	44	1
22	33	53	55	66	77	43	9	11
32	52	63	65	76	42	8	10	21
51	62	64	75	41	7	18	20	31
61	72	74	40	6	17	19	30	50
71	73	39	5	16	27	29	49	60
81	38	4	15	26	28	48	59	70
37	3	14	25	36	47	58	69	80

Fig. 57

Carré oblique de degré 4

$$\xi = 8x + 7y \qquad \eta = 2x + 2y$$

d'où

$$\xi + \eta = x \quad \text{et} \quad \eta - \xi = 3x + 4y.$$

Ici aussi, la diagonale descendante présentera la même particularité que dans le carré ci-dessus.

71	52	24	5	76	57	29	10	45
51	23	4	75	56	28	18	44	70
22	3	74	55	36	17	43	69	50
2	73	63	35	16	42	68	49	21
81	62	34	15	41	67	48	20	1
61	33	14	40	66	47	19	9	80
32	13	39	65	46	27	8	79	60
12	38	64	54	26	7	78	59	31
37	72	53	25	6	77	58	30	11

Fig. 58

Carré oblique de degré 7

$$\xi = 5x + 4y \qquad \eta = 5x + 5y$$

d'où

$$\xi + \eta = x \qquad \eta - \xi = y$$

Ces équations montrent aussi que les diagonales sont constituées par la ligne et la colonne magiques du groupe. Pour le construire

facilement, il suffit de placer le nombre médian 41 au centre du carré. Ici le groupe naturel n'a subi aucun changement.

77	28	69	20	61	12	53	4	45
36	68	19	60	11	52	3	44	76
67	27	59	10	51	2	43	75	35
26	58	18	50	1	42	74	34	66
57	17	49	9	41	73	33	65	25
16	48	8	40	81	32	64	24	56
47	7	39	80	31	72	23	55	15
6	38	79	30	71	22	63	14	46
37	78	29	70	21	62	13	54	5

Fig. 59

Ce groupe naturel fournira aussi des carrés cavaliers ; les paramètres satisfaisant aux conditions prescrites, les seuls carrés cavaliers du premier degré possibles sont ceux dont le pas est égal à 4 ou à 7. Ci-après deux exemples.

Carré cavalier de degré 1 et de marche $\xi + 4\eta$

Ses équations sont

$$\xi = 5x + 4y \qquad \text{et} \qquad \eta = 8x + 8y$$

d'où

$$\xi + \eta = 4x + 3y \qquad \text{et} \qquad \eta - \xi = 3x + 4y.$$

Par suite, la case de départ ne peut plus être arbitrairement choisie, la magie des diagonales ne pouvant pas être ainsi assurée. Mais si nous construisons le carré sans nous inquiéter de cette res-

triction, nous savons que ses lignes et ses colonnes seront magiques; nous savons aussi que, parmi les lignes parallèles à ses deux directions diagonales, quelques-unes seulement présenteront la magie cherchée. Il faut donc les déterminer : formons d'abord un carré *quelconque* du type indiqué; cherchons ensuite, parmi les parallèles aux deux diagonales, celles qui sont magiques. Quelques tatonnements montreront que celles qui se croisent sur le nombre 11, forment une des solutions. Permutons donc circulairement les lignes et les colonnes du carré provisoirement constitué, de façon à amener ce nombre au centre du carré et le problème sera résolu (fig. 60).

77	28	69	20	61	12	53	4	45
6	38	79	30	71	22	63	14	46
16	48	8	40	81	32	64	24	56
26	58	18	50	1	42	74	34	66
36	68	19	60	11	52	3	44	76
37	78	29	70	21	62	13	54	5
47	7	39	80	31	72	23	55	15
57	17	49	9	41	73	33	65	25
67	27	59	10	51	2	43	75	35

Fig. 60

Carré cavalier de degré 1 et de marche $\xi + 7\eta$

Les équations sont

$$\xi = 8x + 7y \qquad \eta = -x - y$$

d'où

$$\xi + \eta = 7x + 6y \qquad \eta - \xi = -8y = y.$$

La diagonale descendante est donc constituée par la ligne magique, ce que l'on savait déjà.

23	4	66	47	28	18	80	61	42
33	14	76	57	38	19	9	71	52
43	24	5	67	48	29	10	81	62
53	34	15	77	58	39	20	1	72
63	44	25	6	68	49	30	11	73
64	54	35	16	78	59	40	21	2
74	55	45	26	7	69	50	31	12
3	65	46	36	17	79	60	41	22
13	75	56	37	27	8	70	51	32

Fig 61

On pourrait de même rechercher les carrés cavaliers à marche plus complexe qu'il serait possible de former.

Ainsi reprenons un exemple précédent

$$\xi = -x + 2y \quad \text{et} \quad \eta = x - y$$

La diagonale montante est constituée par la colonne magique du groupe. Un nombre de cette colonne est donc commun aux deux diagonales. Essayons les divers nombres de la colonne magique en les plaçant successivement au centre du carré et cherchons ceux qui rendent magique la seconde diagonale. Nous constaterons que seuls les nombres 41, 77 et 23 satisfont à la question.

Le carré ainsi formé aurait pour marche $(2\xi + \eta)$ et pour degré $(3\xi + 2\eta)$.

Soient encore les équations

$$\xi = 5x + 2y \quad \text{et} \quad \eta = 5x + 4y.$$

La diagonale descendante $\eta - \xi = 2y$ est constituée par la

colonne magique du groupe. Plaçons le nombre 5 de cette colonne dans la case inférieure de droite du carré et nous obtiendrons le carré ci-dessous qui a pour marche $4\xi + 7\eta$ et pour degré $(3\xi - \eta)$.

77	1	15	20	34	39	53	58	72
63	68	73	6	11	25	30	44	49
40	54	59	64	78	2	16	21	35
26	31	45	50	55	69	74	7	12
3	17	22	36	41	46	60	65	79
70	75	8	13	27	32	37	51	56
47	61	66	80	4	18	23	28	42
33	38	52	57	71	76	9	14	19
10	24	29	43	48	62	67	81	5

Fig. 62

Si l'on examine l'ordonnance des nombres de chacune des colonnes du groupe naturel, on constate qu'elle est oblique à gauche et que le premier nombre d'une colonne a, par rapport au dernier nombre de la colonne précédente, une situation définie aussi par $(3\xi - \eta)$. Ce carré pourrait aussi être déduit d'un groupe dont la première ligne aurait pour éléments 77, 75, 73, 80, 78, 76, 74, 81, 79, et dont la première colonne serait constituée par la suite 77, 5, 14, 23, 32, 41, 50, 59, 68; il suffira pour cela de donner aux nombres de ce groupe l'ordonnance $(\xi + 4y)$, le degré du carré étant 4.

Nous donnerons encore quelques exemples de carrés tirés du groupe naturel, en nous contentant d'en indiquer les équations.

1° $\quad \xi = 5x - 4y \qquad \eta = x + 2y$

on placera dans la case origine l'un des nombres 2, 29, 56 de la deuxième colonne et ceux pris de trois en trois à partir de ces der-

niers, en ligne ou en colonne, soient les nombres 5, 32, 59 et 8, 35, 62.

2° $$\xi = 7x + y \qquad \eta = x + 2y$$

on placera dans la case origine l'un des nombres :

18, 45, 72, 12, 39, 66, 15, 42, 69.

3° $$\xi = 5x + 4y \qquad \eta = x + 7y$$

le nombre 80 placé à l'origine donne un carré magique dont les diagonales sont

↗	80. 14. 29. 53	68	2. 26. 41. 56
↘	16. 65. 42. 10	68	45. 13. 71. 39

Les nombres pris avec un intervalle de trois, en ligne ou en colonne, à partir de 80 produisent également la magie complète.

4° $$\xi = x - y \qquad \eta = 5x + 2y$$

La magie des carrés correspondants peut être obtenue en plaçant à leur origine l'un des nombres 29, 32 ou 35.

Les diagonales de ces trois carrés sont

↗	29. 44. 50. 56	71	77. 2. 17. 23
↘	15. 65. 43. 12	71	40. 18. 68. 37

↗	32. 38. 53. 59	65	80. 5. 11. 26
↘	18. 68. 37. 15	65	43. 12. 71. 40

↗	35. 41. 47. 62	68	74. 8. 10. 20
↘	12. 71. 40. 18	68	37. 15. 65. 43

On remarquera que dans ces trois carrés, la diagonale descendante est constituée par les mêmes nombres; leur ordre seul a changé.

Quand une des diagonales du carré n'est pas constituée par une ligne ou une colonne du groupe, les équations des deux directions principales permettent de limiter les recherches relatives à la détermination du nombre à placer dans la case origine. On peut, avec ces équations, déterminer une des colonnes à laquelle appartiendra ce premier nombre. Il suffira pour cela d'écrire que la somme des nombres de la diagonale est égale à la constante du carré. L'équation résultante est une congruence de module n qui indiquera *la colonne* à laquelle doit appartenir le nombre cherché.

Toutes les considérations qui précèdent s'appliquent à un module impair non premier quelconque. Il serait donc superflu de nous répéter. Cependant, avant de terminer ce chapitre et pour bien montrer l'esprit de nos méthodes, nous dirons quelques mots des carrés de module 15.

Au fur et à mesure que le module augmente, les recherches et vérifications deviennent naturellement plus laborieuses. Mais si l'on a bien saisi tout ce qui a été dit, on peut voir que les vérifications à faire se réduisent le plus souvent à deux ou trois additions. La constante magique, pour le module 15, est 1695.

Considérons dans le groupe naturel les deux directions,

$$\xi = 4x + y \qquad \eta = 8x - 2y$$

que nous adopterons comme directions principales du carré. Le déterminant des paramètres est bien premier avec le module. Les diagonales du carré sont déterminées par

$$\xi + \eta = 12x - y \qquad \eta - \xi = 4x - 3y,$$

Si l'on cherche la colonne à laquelle appartiendra le nombre à placer dans la case origine, le calcul indiquera que c'est celle de

rang 14. Et l'on trouve en effet que le nombre 134, appartenant à cette colonne donne les deux diagonales.

↗	134. 116. 98. 80. 62. 59. 41.	23	5. 212. 209. 191. 173. 157. 137.
↘	156. 197. 28. 69. 110. 151. 207.	23	64. 120. 161, 202. 18. 74. 115.

qui sont bien magiques. Il est inutile de faire la même vérification pour les lignes et les colonnes, car les deux équations données répondent, on le sait, à des directions magiques.

En adoptant comme nombre de début, les nombres, qui dans le groupe, suivent 134 de trois en trois en ligne ou en colonne, on obtient également des diagonales magiques. Exemples :

↗	131. 113. 95. 77. 74. 56. 38	20	2. 224, 206. 188. 170. 152. 149.
↘	153. 209. 25. 66. 107. 163. 204.	20	61. 117. 158. 199. 30. 71. 112.

→	173. 155. 137. 134. 116. 98. 80.	62	59. 41. 23. 5. 212. 209. 191.
↘	210. 26. 67. 108. 164. 205. 21.	62	118. 159. 200. 16. 72. 113. 154.

Les nombres pris avec un intervalle de cinq, ne donnent pas de carrés magiques.

Soient encore les équations

$$\eta = 11x + 7y \quad \text{et} \quad \eta = 7x - 2y$$

qui définissent des directions magiques. Le carré paraît donc possible. Et en effet, le nombre 32, appartenant à la deuxième colonne du groupe naturel, placé à l'origine du carré, donne les deux diagonales magiques

↗	32. 110. 188. 41. 119. 182. 35	113	191. 44. 107. 185. 38, 116. 194.
↘	70. 209. 108, 22. 161. 75. 199	113	27. 151. 65. 204. 118. 17. 156.

En débutant par les nombres 35 et 38 qui, dans le groupe naturel, se trouvent *dans la même ligne* que 32, on forme aussi des carrés dont les diagonales sont magiques.

Ces diagonales sont :

↗	35.113.191.44.107.185.38	116	194.32.110.188.41.119.182,
↘	73.197.111.25.164.63.202	116	30.154.68.207.106.20.159.
↗	38.116.194.32.110.188.41	119	182.35.113.191.44.107.185.
↘	61.200.114.28.152.66.205	119	18.157.71.210.109.23.162.

on constatera que la diagonale montante est, pour ces trois carrés, constituée par les mêmes nombres dont l'ensemble a subi une simple permutation circulaire.

Ces trois nombres sont les seuls qui satisfont au problème. Les nombres, pris de trois en trois ou de cinq en cinq à partir de ceux-là, ne fournissent pas de carrés magiques. Cela tient au fait que les paramètres de la diagonale montante $\xi + \eta = 3x + 5y$ sont précisément les deux facteurs du module 15 et l'on peut en inférer à priori que les lignes magiques dans cette direction sont forcément en nombre très limité.

Le carré fourni par les équations précédentes est cavalier de marche $(7\xi + 2\eta)$ et de degré $(9\xi - \eta)$.

Les paramètres des deux directions principales étant premiers avec le module, le groupe naturel de module 15 fournit un grand nombre de carrés obliques des degrés 1, 7 et 13 et aussi des carrés cavaliers simples de marche $(\xi + 7\eta)$ et $(\xi + 13\eta)$.

L'indicateur 15 du module étant égal à 8, il y a huit valeurs positives et autant de valeurs négatives pour chacun des quatre paramètres ; mais la condition que $(ab' - ba')$ soit premier avec le module, réduit notablement le nombre de combinaisons possibles.

Pour qu'un groupe du module 15 (ou de tout autre module composé) puisse fournir *tous les carrés* obliques et cavaliers *compatibles avec le module*, il faut transformer le groupe de façon à ramener ses directions non magiques aux seules directions principales.

Dans tous les cas, un groupe naturel de module composé impair n, donnera toujours de nombreux carrés à ordonnance oblique des degrés 1, $\frac{n-1}{2}$ et $n-2$ et aussi des carrés cavaliers de premier degré dont l'ordonnance sera définie par

$$\left(\xi + \frac{n-1}{2}\eta\right) \quad \text{et} \quad \xi + (n-2)\,\eta.$$

Il fournira également d'autres carrés de marches et de degrés moins simples, que l'on pourra déterminer en partant de deux équations convenablement choisies pour les deux directions principales.

La première partie de ce travail devrait s'arrêter ici, car nous pensons avoir rempli le programme que nous nous étions imposé. Nous ne le terminerons pas cependant, sans mentionner encore deux méthodes générales et relativement simples pour la constitution de carrés magiques de modules composés de types différents de ceux déjà décrits, les procédés exposés plus haut permettant d'ailleurs d'en multiplier considérablement le nombre.

Soit un module $n = pq$, p et q étant supposés premiers. On commencera par former deux carrés ayant p et q pour modules. On remplacera ensuite chacun des nombres de l'un de ces carrés, celui de module p par exemple, par son produit avec q^2. Cette opération n'altèrera évidemment pas la magie du carré. Ceci fait, on substituera au nombre contenu dans chacune des cases de ce nouveau carré, la somme de ce nombre avec chacun des nombres du carré de module q déjà construit. Par cette opération, chacune des cases

du carré magique de module p contiendra q^2 nombres. Ce carré en aura donc p^2q^2 et il sera magique.

On remarquera qu'ainsi construit il sera constitué par les nombres de la série naturelle, dont le premier terme serait $(1 + q^2)$. Il suffira par suite de retrancher q^2 de chacun de ces nombres pour avoir un carré constitué par les $n^2 = p^2q^2$ premiers nombres naturels.

La méthode s'applique à un module composé de nombres premiers quelconques [1]. Quand on aura construit un carré de module $n = pq$, on construira en appliquant la même règle, le carré de module pqr, et ainsi de suite pour un plus grand nombre de facteurs.

Ci-après deux carrés de modules 9 et 15 construits en appliquant cette méthode. Le premier est constitué au moyen de deux carrés identiques de module 3, et le second au moyen du même carré de 3 et d'un cavalier simple de module 5.

31	30	35	22	21	26	67	66	71
36	32	28	27	23	19	72	68	64
29	34	33	20	25	24	65	70	69
76	75	80	40	39	44	4	3	8
81	77	73	45	41	37	9	5	1
74	79	78	38	43	42	2	7	6
13	12	17	58	57	62	49	48	53
18	14	10	63	59	55	54	50	46
11	16	15	56	61	60	47	52	51

Fig. 63.

[1] Il n'est même pas nécessaire de supposer des facteurs premiers. Il suffit, pour l'appliquer, de savoir construire un carré ayant pour module chacun des facteurs.

62	55	60	179	172	177	26	19	24	98	91	96	215	208	213
57	59	61	174	176	178	21	23	25	93	95	97	210	212	214
58	63	56	175	180	173	22	27	20	94	99	92	211	216	209
116	109	114	188	181	186	80	73	78	152	145	150	44	37	42
111	113	115	183	185	187	75	77	79	147	149	151	39	41	43
112	117	110	184	189	182	76	81	74	148	153	146	40	45	38
170	163	168	17	10	15	134	127	132	206	199	204	53	46	51
165	167	169	12	14	16	129	131	133	201	203	205	48	50	52
166	171	164	13	18	11	130	135	128	202	207	200	49	54	47
224	217	222	71	64	69	143	136	141	35	28	33	107	100	105
219	221	223	66	68	70	138	140	142	30	32	34	102	104	106
220	225	218	67	72	65	139	144	137	31	36	29	103	108	101
8	1	6	125	118	123	197	190	195	89	82	87	161	154	159
3	5	7	120	122	124	192	194	196	84	86	88	156	158	160
4	9	2	121	126	119	193	198	191	85	90	83	157	162	155

Fig. 64

Cette méthode est donnée par M. Arnoux sous le nom de *méthode des carrés mineurs.*

La suivante donne des carrés de composition différente ; afin d'en simplifier l'exposition, nous la spécialiserons pour un module ayant le nombre 3 comme facteur. Soit donc un module $n = 3K$. Pour pouvoir l'appliquer, il suffit de savoir construire un carré de module K.

On assemblera les lignes et les colonnes du groupe naturel en trois séries, sans en modifier l'ordre. Le groupe se trouvera ainsi divisé en neuf compartiments contenant chacun K lignes et K colonnes. Chacun de ces compartiments constitue un groupe fondamental de

module K, pouvant donner naissance à de nombreux carrés. Les constantes de ces neuf groupes sont en progression arithmétique en ligne et en colonne (la raison étant d'ailleurs différente, suivant que l'on considère les lignes ou les colonnes). Ces constantes forment donc aussi un groupe fondamental de module 3. Construisons un carré magique déduit de ce dernier groupe et remplaçons ensuite le nombre occupant chacune de ses cases par un des carrés magiques ayant ce nombre pour constante. Le carré magique de module 3 K sera ainsi constitué.

Appliquons ceci aux groupes naturels de modules 9, 15 et 21.

Le premier de ces groupes divisé en neuf compartiments donne, avec les constantes relatives à chacun d'eux, le groupe fondamental auxiliaire.

33 . 42 . 51
114 . 123 . 132
195 . 204 . 213

Fig. 65

dont on déduira par la règle connue le carré magique fig. 66 dont la constante est 369.

42	195	132
213	123	33
114	51	204

Fig. 66

En remplaçant chacun des termes de ce carré par un carré magique déduit du groupe correspondant, on obtiendra un carré magique de module 9.

Le groupe de module 15, divisé en neuf compartiments constitués

chacun par 25 nombres, donnera avec les constantes de chacun d'eux le groupe fondamental

165 . 190 . 215
540 . 565 . 590
915 . 940 . 965

Fig. 67

dont on déduira le carré fig. 68 ayant pour constante 1695.

540	215	940
965	565	165
190	915	590

Fig. 68

On remplacera chacun des termes par un des nombreux carrés de module 5 que l'on sait construire.

Pour le module 21, on aura le groupe fondamental

469. 518. 567
1498. 1547. 1596
2527. 2576. 2625

Fig. 69

dont on déduira le carré (fig. 70) ayant 4641 pour constante magique.

518	2527	1596
2625	1547	469
1498	567	2576

Fig. 70

On remplacera chacun des termes par un des carrés de module 7 que l'on tirera du groupe correspondant.

Le carré oblique ci-dessous, tiré du groupe naturel dont la ligne magique a été portée au premier rang, est de degré $(3\xi - 3\eta)$.

45	41	30	19	8	4	28
40	29	18	14	3	27	44
35	17	13	2	26	43	39
16	12	1	25	49	38	34
11	7	24	48	37	33	15
6	23	47	36	32	21	10
22	46	42	31	20	9	5

Fig. 72

Ce serait un carré de degré 4, si on le déduisait du groupe dont l'ordre des lignes serait

22. 15. 43. 8. 36. 1. 29.

Le carré ci-dessous, oblique tiré du groupe naturel dont la ligne magique seule a été déplacée pour être portée au premier rang, est de degré $(-\xi - 2\eta)$, ce qui équivaut on le sait à $(6\xi + 5\eta)$.

3	13	16	33	36	46	28
12	15	32	42	45	27	2
21	31	41	44	26	1	11
30	40	43	25	7	10	20
39	49	24	6	9	19	29
48	23	5	8	18	35	38
22	4	14	17	34	37	47

Fig. 73

Il serait de degré 4 pour le groupe fondamental dont l'ordre des lignes serait

22. 29. 1. 36. 8. 43. 15.

Il serait de degré $(4\xi + 2\eta)$ pour le groupe dont les lignes se présenteraient dans l'ordre

22. 8. 29. 43. 1. 15. 36

de degré $(2\xi - \eta)$ pour le groupe

22. 15. 43. 8. 36. 1. 29

de degré 5ξ pour le groupe

22. 36. 15. 1. 43. 29. 8

et enfin de degré $(3\xi - 3\eta)$ pour le groupe

22. 43. 36. 29. 15. 8. 1.

En résumé, la variation du degré dépend, c'est de toute évidence, de la modification de l'arrangement des lignes du groupe naturel.

Les carrés à disposition cavalière donnent lieu à des remarques analogues.

Ainsi le carré (fig. 26) pour lequel on a indiqué deux modes de génération, est aussi cavalier de 5 pas et de degré $(-\xi + \eta)$ pour le groupe dont les lignes seraient dans leur ordre naturel.

Le carré (fig. 23) est cavalier simple de degré 4 pour le groupe dont les diverses lignes seraient disposées dans l'ordre 1. 22. 43. 15. 36. 8. 29.

Celui (fig. 50) est cavalier de 4 pas et de degré 7 pour le groupe dans lequel les lignes se trouveraient dans l'ordre

1. 46. 64. 37. 55. 19. 73. 10. 28,

Celui (fig. 51) peut, par la marche ($- \xi - 2\eta$), être déduit du groupe

1. 19. 46. 73. 64. 10. 37. 28. 55.

On pourrait multiplier les exemples. Tous ces résultats peuvent être établis par le calcul.

DEUXIÈME PARTIE

—

APPLICATION DU CALCUL AU PROBLÈME DES CARRÉS MAGIQUES

— Toute ligne $(ax + by)$ non parallèle aux deux directions principales, tracée dans un groupe fondamental de module premier n, rencontre n nombres différents dont la somme est magique. On peut dans ce groupe, tracer n lignes différentes parallèles à une direction donnée. Si l'on s'astreint à prendre l'origine de ces n lignes sur une ligne qui soit elle-même de direction magique, les nombres que ces n lignes rencontreront forment un carré magique (pages 23 et suivantes 1re partie).

Le passage d'un groupe fondamental aux carrés magiques que l'on peut en tirer, s'effectuera donc au moyen des deux équations

$$(1) \qquad \xi = ax + by \quad \text{et} \quad \eta = a'x + b'y$$

déterminant les séries qui constituent les lignes et les colonnes du carré.

Soit un nombre A du groupe, placé dans une des cases du carré ; ceux qui le suivent *en ligne* dans ce carré sont déterminés par les multiples de l'expression $(ax + by)$, et ceux qui le suivent *en colonne*, le sont par les multiples de $(a'x + b'y)$. Chacun de ces multiples donne la situation des divers nombres dans le groupe fondamental.

Ainsi le m^e nombre après A, dans la ligne occupée par ce der-

nier dans le carré, aura dans le groupe une situation définie par $m(ax + by)$ ou $(max + mby)$, c'est-à-dire qu'il faudra à partir du nombre A, prendre ma dans la direction horizontale et mb dans la direction verticale pour trouver dans le groupe le nombre cherché ; en d'autres termes, celui-ci sera à l'extrémité de la résultante des deux quantités ma et mb, comptées à partir de A. Pour avoir tous les nombres qui suivent A en ligne ou en colonne dans le carré, il suffira de donner à m toutes les valeurs de 1 à $(n - 1)$. Il n'est peut-être pas superflu d'ajouter, pour le lecteur non familiarisé avec la notion des congruences, que ce nombre A correspond à $m = n$ ou zéro.

Prenons maintenant comme origine le premier nombre du groupe fondamental et plaçons-le dans la case origine du carré. Un point d'abscisse p sur l'axe horizontal du carré sera défini par $p(ax + by)$ ou $(pax + pby)$; un point d'ordonnée q sur son axe vertical sera défini par $(qa'x + qb'y)$. Par suite, le point ayant dans le carré l'abcisse p et l'ordonnée q sera défini par

$$(pax + pby) + (qa'x + qb'y) = (pa + qa')x + (pb + qb')\,y.$$

Ce point correspondra évidemment dans le groupe au nombre dont l'abcisse r et l'ordonnée s sont

$$(2) \qquad \begin{aligned} r &= pa + qa' \\ s &= pb + qb'. \end{aligned}$$

On en déduit inversement p et q en fonction de r et s.
On a ainsi :

$$(3) \qquad p = \frac{rb' - sa'}{ab' - ba'} \qquad q = \frac{as - br}{ab' - ba'}$$

— Les nombres situés sur la diagonale montante des deux directions définies par les équations (1) seront fournis par

$$\xi + \eta = (a + a')\,x + (b + b')\,y.$$

Les nombres de la diagonale descendante seront déterminés par

$$\eta - \xi = (a' - a)\,x + (b' - b)y$$

La position dans le groupe d'un quelconque des nombres diagonaux étant donnée, celles des autres seront définies par ces équations. Pour les déterminer, on partira en général d'un nombre occupant une extrémité de l'un des deux axes du carré : le nombre origine, pour la diagonale montante et, pour la diagonale descendante, le nombre ayant dans le carré l'abscisse ou l'ordonnée $(n - 1)$. Si l'on adopte les directions $\uparrow\rightarrow$ comme positives, l'équation $(\eta - \xi)$ donne les nombres dans le sens montant ; pour avoir les mêmes nombres dans le sens descendant, on adopterait l'expression $(\xi - \eta)$.

— Considérons deux nombres qui se suivent *dans une ligne du groupe ;* si dans ce groupe, les coordonnées du premier sont r et s, celles du second seront $(r + 1)$ et s. Soient p et q les coordonnées *dans le carré* du premier de ces deux nombres ; si α et β sont les caractéristiques de l'ordonnance des nombres dans le carré, les coordonnées du second de ces nombres seront $(p + \alpha)$ et $(q + \beta)$. On pourra donc écrire

$$r + 1 = (p + \alpha)\,a + (q + \beta)a'$$
$$s = (p + \alpha)\,b + (q + \beta)b'.$$

Ces deux relations combinées avec les relations (2), afin d'éliminer r et s, donnent les équations

$$(4) \qquad \begin{aligned} a\alpha + a'\beta &= 1 \\ b\alpha + b'\beta &= 0 \end{aligned}$$

indépendantes de p et de q. Elles permettent d'exprimer α et β en fonction des paramètres des deux équations de transformation. On obtient

$$(5) \qquad \alpha = \frac{b'}{ab' - ba'} \qquad \beta = \frac{-\,b}{ab' - ba'}$$

— Soient maintenant dans le groupe, r_1 et s_1 les coordonnées *du dernier nombre de l'une de ses lignes ;* celles du nombre qui suit, c'est-à-dire du premier nombre de la ligne suivante, seront $(r_1 + 1)$ et $(s_1 + 1)$; si l'on désigne par π et ρ les caractéristiques du degré du carré, on aura en employant les notations précédentes

$$r_1 = p_1 a + q_1 a' \qquad s_1 = p_1 b + q_1 b'$$
$$r_1 + 1 = (p_1 + \pi)\, a + (q_1 + \rho) a'$$
$$(s_1 + 1) = (p_1 + \pi)\, b + (q_1 + \rho)\, b'.$$

Éliminons comme précédemment r_1 et s_1, les quantités p_1 et q_1 se trouveront également éliminées et l'on obtiendra

$$(6) \qquad \begin{aligned} \pi a + \rho a' &= 1 \\ \pi b + \rho b' &= 1. \end{aligned}$$

On en déduit les valeurs des caractéristiques :

$$(7) \qquad \pi = \frac{b' - a'}{ab' - ba'} \qquad \rho = \frac{a - b}{ab' - ba'}$$

— Les équations (4) et (6) permettent inversement de déterminer les paramètres des équations de transformation, lorsqu'on connaît les caractéristiques de la marche et du degré du carré. On a ainsi :

$$(8) \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{\rho - \beta}{\rho\alpha - \pi\beta} \qquad & b &= \frac{\cdot - \beta}{\rho\alpha - \pi\beta} \\ a' &= \frac{\alpha - \pi}{\rho\alpha - \pi\beta} \qquad & b' &= \frac{\alpha}{\rho\alpha - \pi\beta}. \end{aligned} \right.$$

Calculons au moyen de ces expressions la quantité $(ab' - ba')$, nous obtenons :

$$(9) \qquad ab' - ba' = \frac{1}{\rho\alpha - \pi\beta}$$

— Il ne faut pas perdre de vue que la valeur numérique maxima des paramètres et des caractéristiques est $(n - 1)$; en d'autres termes, les relations (4), (6) et (8) sont des *congruences de module n* ; on

peut donc ajouter ou retrancher un multiple quelconque de n à un de leurs membres sans les altérer. En conséquence, les solutions numériques fournies par ces relations doivent toujours être ramenées à leur valeur congrue la plus réduite.

— Les valeurs des caractéristiques α, β, π et ρ qui correspondent à des paramètres premiers avec le module, paramètres dont le déterminant est également premier avec ce même module, fourniront en général des carrés magiques. Ces conditions ne sont pas toujours suffisantes pour assurer la magie des diagonales, qui doivent aussi correspondre à des lignes magiques de groupe fondamental.

Les nombreux exemples donnés dans la première partie suffisent pour fixer les idées du lecteur à cet égard. On a vu aussi, par des exemples relatifs aux modules non premiers, qu'il n'est pas nécessaire que les deux paramètres d'une même équation soient en même temps premiers avec le module, à la condition toutefois que le groupe fondamental ait subi une transformation convenable.

On verra plus loin comment on détermine les lignes magiques dans une direction dont l'un des paramètres contient un des facteurs premiers du module.

— On conclut des relations qui précèdent :

1° $(\rho\alpha - \pi\beta)$ et $(ab' - ba')$ ne doivent pas être nuls ; ils doivent de plus être premiers avec le module, sans quoi on ne pourrait pas obtenir des quotients entiers pour les valeurs des paramètres et des caractéristiques. Si d'ailleurs le déterminant $ab' - ba'$ était nul, on en déduirait $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$; c'est-à-dire que les deux directions déterminées par les équations de transformation seraient identiques et le carré ne serait pas défini.

2° $(\alpha - \pi)$ et $(\rho - \beta)$ ne peuvent pas être congrus au module, car ils seraient nuls dans ce cas ; il en serait par conséquent de même des paramètres a et a', ce qui équivaudrait à l'indétermination du carré magique. *La valeur limite* de chacune de ces quantités est donc $(n - 1)$.

— Dans les carrés de degré non complexe, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\pi = 0$, les relations précédentes se réduisent à

$$a = \frac{\rho - \beta}{\rho\alpha} \quad b = \frac{-\beta}{\rho\alpha} \quad a' = b' = \frac{1}{\rho}.$$

Par suite, l'équation définissant les colonnes du carré est

$$\eta = \frac{1}{\rho}(x + y)$$

Ces colonnes sont donc constituées par des lignes parallèles à la diagonale montante du groupe fondamental. Dans l'hypothèse que le nombre origine du groupe fondamental occupe la case origine du carré, la première colonne du carré est constituée par cette diagonale même dont les nombres sont pris avec un intervalle égal à $\frac{1}{\rho}$ (cet intervalle ne peut être entier que si ρ est premier avec le module). Dans le cas considéré, le degré du carré détermine donc *l'ordre* dans lequel les nombres d'une colonne se suivent ; en d'autres termes, quel que soit ce degré, les colonnes du carré sont pour un même groupe, constituées par les mêmes nombres ; leur ordre seul varie avec le degré.

Si au lieu de considérer le cas $\pi = 0$, on supposait $\rho = 0$, on aurait $a = b = \frac{1}{\pi} a' = \frac{\pi - \alpha}{\pi\beta} b' = \frac{-\alpha}{\pi\beta}$. Par suite $\xi = \frac{1}{\pi}(x + y)$.

Ce sont alors les lignes du carré magique qui sont constituées par des parallèles à la diagonale montante du groupe fondamental. L'ordre dans lequel ces nombres sont disposés dépend de $\frac{1}{\pi}$. Si dans l'un des deux cas examinés, on avait en même temps $\alpha = \beta$, c'est-à-dire que si le carré était à disposition oblique, on aurait aussi $a' = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\pi}$ et $b' = \frac{1}{\pi}$; on en conclurait $\xi + \eta = \frac{1}{\alpha} x$.

Donc dans les carrés de cette nature, la diagonale montante est constituée par la ligne magique du groupe fondamental.

En résumé, que l'on ait $\pi = 0$ ou bien $\rho = 0$, les colonnes ou bien les lignes de tous les carrés satisfaisant à la condition donnée sont pour un groupe donné, constituées par les mêmes nombres ; leur ordre seul varie avec la valeur de ρ ou de π.

Pour que le lecteur puisse se rendre compte de cette variation, nous donnons ci-après deux tables des valeurs du quotient $\frac{1}{K}$; la première relative à des modules premiers et la seconde relative à quelques modules composés.

Modules	5	7	11	13	17	19	23
Valeurs de K 1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	6	7	9	10	12
3	2	5	4	9	6	13	8
4	4	2	3	10	13	5	6
5	.	3	9	8	7	4	12
6	1	6	2	11	3	16	4
7	3	.	8	2	5	11	10
8	2	1	7	5	15	12	3
9	4	4	5	3	2	17	18
10	.	5	10	4	12	2	7
11	1	2	.	6	14	7	21
12	3	3	1	12	10	8	2
13	2	6	6	.	4	3	16

Fig. 74

Modules	9	15	21	25	27	33
Valeurs de K 1	1	1	1	1	1	1
2	5	8	11	13	14	17
3	.	.	.	17	.	.
4	7	4	16	19	7	25
5	2	.	17	.	11	20
6	.	.	.	21	.	.
7	4	13	.	18	4	19
8	8	2	8	22	17	29

Fig. 75

L'examen de celle-ci explique pourquoi on ne peut pas former de carré magique des types $\pi = 0$ et $\rho = 0$, si ρ ou π ne sont pas premiers avec le module. Il est ainsi établi que les modules composés ne peuvent pas fournir tous les types de carrés magiques possibles pour des modules premiers.

— Considérons dans les carrés de degré simple, correspondant par

conséquent à $\pi = 0$, ceux pour lesquels on a en même temps $\alpha = 1$ et $\beta - \rho = n - 1$. On en déduit

$$a = \frac{-(n-1)}{\rho} = \frac{1}{\rho}$$
$$b = \frac{-\rho - n + 1}{\rho} = \frac{1}{\rho} - 1.$$

Comme on a aussi $a' = b' = \frac{1}{\rho}$, les équations de transformation deviennent

$$\xi = \frac{1}{\rho} x + \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) y$$
$$\eta = \frac{1}{\rho} (x + y).$$

Par suite $\eta - \xi = y$

Donc pour les carrés de cette catégorie, la diagonale descendante est constituée par la colonne magique du groupe fondamental.

— La limite des valeurs de $(\beta - \rho)$ et de $(\alpha - \pi)$ est, on l'a vu plus haut, $(n - 1)$ ou, ce qui revient au même, égale à (-1). Supposons donc $\beta - \rho = n - 1 \equiv -1$. On peut également faire la supposition $\rho = 0$; le degré du carré sera aussi dans ce cas, exprimé par un seul terme, celui ayant π pour facteur ; ce degré sera donc compté horizontalement. On a dans l'hypothèse considérée $a = b = \frac{1}{\pi}$; comme $\beta = -1$, on aura aussi $a' = \frac{\alpha - \pi}{\pi}$ et $b' = \frac{\alpha}{\pi}$. Les équations de transformation seront par suite

$$\xi = \frac{1}{\pi} (x + y) \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\alpha - \pi}{\pi} x + \frac{\alpha}{\pi} y.$$

Ainsi les lignes du carré sont constituées par des parallèles à la diagonale montante du groupe fondamental, les nombres successifs étant, dans chacune de ces parallèles, pris avec un intervalle égal à $\frac{1}{\pi}$; supposons par exemple : $\pi = 1$; comme $\alpha - \pi$ ne peut pas être

nul, la valeur positive *minima de* α sera égale à 2. Dans ce cas, les équations se réduisent à $\xi = x + y$ et $\eta = x + 2y$.

On en conclut que la diagonale descendante du carré est constituée par la colonne magique du groupe. Le carré correspondant à l'hypothèse considérée, est cavalier de deux pas pris horizontalement (en d'autres termes, sa marche est $2\xi - \eta$) et de degré simple égal à 1 pris aussi horizontalement.

Les carrés de ce type, on le verra plus loin, ne peuvent pas être diaboliques. Ci-après, à titre d'exemple, un carré de module 7 tiré du groupe naturel.

4	12	20	28	29	37	45
38	46	5	13	21	22	30
23	31	39	47	6	14	15
8	16	24	32	40	48	7
49	1	9	17	25	33	41
34	42	43	2	10	18	26
19	27	35	36	44	3	11

Fig. 76

— Supposons maintenant que les deux conditions

$$\beta - \rho = n - 1 \equiv -1 \quad \text{et} \quad \alpha - \pi = n - 1 \equiv -1$$

soient satisfaites à la fois ; on en déduit

$$\rho = \beta + 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \pi - 1.$$

On en tire

$$\alpha\rho = \beta\pi + \pi - \beta - 1$$

d'où

$$\alpha\rho - \beta\pi = \pi - \beta - 1.$$

Les équations de transformation deviennent

$$\xi = \frac{1}{\pi - \beta - 1}(x - \beta y)$$

$$\eta = \frac{1}{\pi - \beta - 1}(-x + \alpha y)$$

et l'équation de la diagonale montante est

$$\xi + \eta = \frac{1}{\pi - \beta - 1}(\alpha - \beta)y.$$

Les carrés obliques étant définis par la condition $\alpha = \beta$, on en conclut qu'il n'existe pas de carré oblique du type considéré, ce que l'on aurait pu d'ailleurs prévoir ; on sait que dans un tel carré la diagonale montante doit être formée par la ligne magique du groupe.

Dans les carrés à disposition cavalière du type considéré, la diagonale montante est constituée par la colonne magique du groupe.

Soit pour préciser $\pi = 0$ d'où $\alpha = -1$. Soit aussi $\beta = 2$ d'où $\rho = 3$ et par suite $\pi - \beta - 1 = -3$; les équations de transformation sont alors $\xi = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}y$ et $\eta = \frac{x}{3} + \frac{y}{3}$. Si l'on suppose que $n = 5$, ces équations deviennent

$$\xi = 3x + 4y \quad \text{et} \quad \eta = 2x + 2y.$$

Ci-après deux carrés répondant à la question

21	19	12	10	3
14	7	5	23	16
2	25	18	11	9
20	13	6	4	22
8	1	24	17	15

Fig. 77

16	14	7	5	23
9	2	25	18	11
22	20	13	6	4
15	8	1	24	17
3	21	19	12	10

Fig. 78

Si $n = 7$, les équations pour les mêmes valeurs de α et β deviennent

$$\xi = -2x - y \qquad \eta = 2x + 2y$$

Ci-après deux carrés de ce type

37	35	26	17	8	6	46
28	19	10	1	48	39	30
12	3	43	41	32	23	21
45	36	34	25	16	14	5
29	27	18	9	7	47	38
20	11	2	49	40	31	22
4	44	42	33	24	35	13

Fig. 79

9	7	47	38	29	27	18
49	40	31	22	20	11	2
33	24	15	13	4	44	42
17	8	6	46	37	35	26
1	48	39	30	28	19	10
41	32	23	21	12	3	43
25	16	14	5	45	36	34

Fig. 80

Ils se déduisent d'ailleurs l'un de l'autre par une permutation circulaire des lignes et colonnes.

Le lecteur peut ainsi multiplier les hypothèses et les exemples.

— On a déterminé plus haut les caractéristiques de l'ordonnance des nombres d'une ligne du groupe en fonction des paramètres des équations de transformation et inversement.

Nous chercherons maintenant l'ordonnance dans le carré des membres appartenant à une même colonne de groupe fondamental.

Deux nombres qui se suivent dans une colonne du groupe ont une même abscisse r et les ordonnées s et $(s + 1)$. Soient dans le carré, p et q les coordonnées du premier de ces points et $(p + \mu)$ et $(q + \nu)$ celles du second.

Il nous faut déterminer μ et ν. On écrira comme précédemment :

$$r = p\imath + qa' \qquad r = (p + \mu)\, a + (q + \nu)a'$$
$$s = pb + qb' \qquad (s + 1) = (p + \mu)\, b + (q + \nu)b'$$

d'où l'on tirera : $\begin{cases} \mu a + \nu a' = 0 \\ \mu b + \nu b' = 1. \end{cases}$

et par suite :

$$(10) \qquad \mu = \frac{-a'}{ab' - ba'} \qquad \nu = \frac{a}{ab' - ba'}$$

Eu égard aux relations (5) et (7), au aura

$$(11) \qquad \mu = \pi - \alpha \qquad \nu = \rho - \beta$$

Ainsi le pas suivant | l'horizontale / la verticale | des nombres d'une même colonne est, par rapport aux caractéristiques du degré du carré, le complémentaire du pas suivant les mêmes directions des nombres d'une même ligne.

— Déterminons maintenant la situation dans le carré du premier nombre d'une colonne par rapport au dernier nombre de la colonne précédente. Soient w et z les coordonnées de ce premier nombre par rapport à celui qui le précède, nous écrirons :

$$r = pa + qa' \qquad r + 1 = (p + w)\,a + (q + z)\,a'$$

$$n - 1 = pb + qb' \qquad 0 = (p + w)\,b + (q + z)\,b'$$

d'où on tire $\quad wa + za' = 1 \quad$ et $\quad wb + zb' = 1$

et par conséquent (12) $\quad w = \pi \quad$ et $\quad z = \rho$

donc ce que l'on entend par *degré d'un carré* ne change pas, soit que l'on considère la marche des nombres d'une même ligne, soit celle des nombres d'une même colonne.

— En résumé, les deux directions principales du carré étant définies par

$$\xi = ax + by$$

$$\eta = a'x + b'y$$

les nombres successifs d'une ligne du groupe sont dans le carré disposés suivant

$$(\alpha\xi + \beta\eta)$$

et ceux d'une même colonne suivant

$$(\mu\xi + \nu\eta) \quad \text{ou} \quad \left[(\pi - \alpha)\,\xi + (\rho - \beta)\,\eta\right].$$

Le degré du carré est égal à la somme de ces deux expressions, soit à

$$(\pi\xi + \rho\eta).$$

Ce degré exprime la situation du premier nombre d'une $\left|\begin{array}{c}\text{ligne}\\ \text{colonne}\end{array}\right|$ par rapport au dernier nombre de la $\left|\begin{array}{c}\text{ligne}\\ \text{colonne}\end{array}\right|$ qui précède dans le groupe.

— Si l'on essayait d'appliquer les *règles* qui précèdent aux modules pairs, on se heurterait à des impossibilités. Le déterminant *(ab' — ba')* ne pourrait pas être *premier* avec le module *en même temps que les paramètres*. Dans les groupes de modules pairs, il n'y a pas de ligne ou de colonne magique ; les diagonales seules jouissent de cette propriété dans le groupe naturel.

Pour la possibilité des carrés réguliers pairs, il est donc indispensable que l'un des paramètres soit pair, ce qui nous conduit à rechercher les transformations à faire subir au groupe naturel, tout comme les modules impairs. Le problème à résoudre est le même (Voir note II).

— Les expressions ci-dessus calculées fournissent quelques observations intéressantes.

Dans tout carré magique pour lequel $\pi = 0$, les nombres d'une même colonne ont, *suivant l'horizontale*, une marche égale et de signe contraire à celle des nombres d'une même ligne.

Si les carrés satisfaisant à cette condition sont en même temps obliques, c'est-à-dire si l'on a aussi $\alpha = \beta = 1$ et par suite $\mu = -1$ $\nu = \rho - 1$, le pas suivant la verticale des nombres d'une même colonne, est égal au degré diminué de l'unité.

Si le carré oblique est du premier degré, c'est-à-dire si $\rho = -1$, on aura $\nu = -2$.

Donc dans ces carrés, les nombres d'une même colonne ont une *marche cavalière de deux pas descendant à gauche*. Si ce carré oblique est du degré 2, les nombres d'une même colonne suivent une marche cavalière de trois pas descendant à gauche.

Enfin pour le degré limite

$$\rho = -(n-2) \equiv 2$$

on a

$$\nu = 1$$

les nombres d'une colonne suivent donc une marche oblique montant à gauche, ce que l'on savait déjà.

— Considérons toujours dans l'hypothèse $\pi = 0$, les carrés cavaliers à deux pas et du premier degré, c'est-à-dire ceux pour lesquels on a

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2 \quad \text{et} \quad \rho = -1$$

on en conclut

$$\mu = -1 \quad \text{et} \quad \nu = \rho - \beta = -3.$$

Donc dans ces carrés, les nombres d'une même colonne suivent une marche cavalière de *trois pas descendant* à gauche, soit de $(n-3)$ *pas montant* à gauche. En général dans les carrés cavaliers du *premier degré* si l'on a $\beta = k$, on aura enfin à cause de $\rho = -1$.

$$\nu = \rho - k = -1 - k \equiv (n-1) - k.$$

Donc dans ces carrés, les nombres d'une même colonne suivent une marche cavalière à gauche, dont le pas est le complément par rapport à $(n-1)$, du pas des nombres d'une même ligne.

Si l'on fait k égal à sa limite $(n-2)$, la quantité ν sera égale à l'unité. Par suite, dans ces carrés les nombres d'une même colonne suivent une marche oblique montant à gauche.

— Les observations contenues dans ces derniers paragraphes expliquent la diabolie des carrés cavaliers ; les lignes et aussi les colonnes

du groupe fondamental y sont disposées suivant une marche cavalière. Donc toute permutation circulaire des lignes ou des colonnes de ces carrés n'altère pas cette disposition et par suite leur magie.

On voit aussi pourquoi les carrés limites [ce sont ceux dans lesquels l'une des expressions $(\alpha - \pi)$ et $(\rho - \beta)$ est égale à $(n - 1)$] ne peuvent pas être diaboliques.

— Pour ce qui est des carrés à disposition oblique, une permutation circulaire de leurs lignes ou de leurs colonnes ne modifie pas leur magie horizontale et verticale ; mais comme une de leurs diagonales doit-être formée par la ligne magique du groupe fondamental, on comprend qu'une permutation circulaire d'une ou plusieurs lignes de ces carrés exige, pour la conservation de la magie diagonale, la permutation d'un même nombre de colonnes.

— Les relations (2) et suivantes sont établies dans l'hypothèse où le premier nombre du groupe fondamental occupe la case origine du carré.

Si ce premier nombre doit être placé dans la case de coordonnées ξ_1 et η_1 du carré, cherchons en fonction des caractéristiques du carré, les coordonnées des divers nombres du groupe.

α et β étant les caractéristiques de l'ordonnance d'une ligne du groupe, le dernier nombre de la première ligne a pour coordonnées dans le carré

$$(\xi_1 - \alpha) \quad \text{et} \quad (\eta_1 - \beta).$$

Le nombre suivant, soit le premier nombre de la deuxième ligne, aura pour coordonnées

$$(\xi_1 - \alpha + \pi) \quad \text{et} \quad (\eta_1 - \beta + \rho),$$

les quantités π et ρ représentant les caractéristiques du degré ; les coordonnées du dernier nombre de cette deuxième ligne seront

$$(\xi_1 - \alpha + \pi) - \alpha = \xi_1 - 2\alpha + \pi$$
$$(\eta_1 - \beta + \rho) - \beta = \eta_1 - 2\beta + \rho$$

les coordonnées du premier nombre de la ligne suivante, c'est-à-dire de la troisième, s'obtiendront en ajoutant π à la première et ρ à la deuxième de ces expressions, elle seront donc

$$\xi_1 + 2(\pi - \alpha) \quad \text{et} \quad \eta_1 + 2(\rho - \beta)$$

et ainsi de suite ; la loi de formation est manifeste.

Le premier nombre de la ligne *de rang m* aura pour coordonnées dans le carré

$$\xi_1 + (m - 1)(\pi - \alpha)$$
$$\eta_1 + (m - 1)(\rho - \beta)$$

et les coordonnées du dernier nombre de cette ligne seront

$$\xi_1 + (m - 1)\pi - m\alpha$$
$$\eta_1 + (m - 1)\rho - m\beta$$

celles du nombre de *rang p dans cette même ligne* seront

$$\xi_1 + (m - 1)(\pi - \alpha) + (p - 1)\alpha$$
$$\eta_1 + (m - 1)(\rho - \beta) + (p - 1)\beta$$

Si l'on fait $p = n$ dans ces deux expressions, on retrouve les deux précédentes.

Pour avoir les coordonnées dans le carré du nombre *médian* d'une ligne de rang m, il faudra dans ces deux dernières expressions remplacer p par $\frac{n + 1}{2}$.

— On a vu dans la première partie que pour construire un carré magique oblique, on doit opérer une transformation du groupe fondamental naturel de façon à porter au premier rang sa ligne magique, et cela afin d'éviter la recherche de la case dans laquelle il faut placer le premier nombre de ce groupe.

Le calcul aussi détermine la case dans laquelle doit être placé ce premier nombre pour que la ligne ou la colonne magique du

groupe occupe une des diagonales du carré. Ce calcul n'est en réalité pas nécessaire ; nous ne le produisons ici qu'à titre d'exercice. Si le nombre ayant rang p dans une ligne du groupe occupe la diagonale montante du carré, les valeurs numériques de ses deux coordonnées devront être égales ; si ce nombre doit se trouver dans la diagonale descendante, son abscisse dans le carré sera égale au *complément à* $(n - 1)$ de son ordonnée. Imposer ces deux conditions à la fois, c'est dire que le nombre considéré doit occuper la case centrale du carré.

Dans chacun des deux premiers cas, il n'y a qu'une équation de conditions reliant les valeurs ξ_1 et η_1 ; le problème est donc indéterminé. Dans le dernier cas, les deux équations de condition donnent nécessairement une solution unique pour les coordonnées cherchées.

Posons donc que la ligne médiane du groupe fondamental doit occuper la diagonale montante du carré ; nous devons, après avoir dans les expressions calculées au paragraphe précédent, remplacé m par $\frac{n+1}{2}$ ou plus simplement par $\frac{1}{2}$, écrire l'égalité

$$\xi_1 + \frac{1}{2}(\alpha - \pi) + (p - 1)\alpha = \eta_1 + \frac{1}{2}(\beta - \rho) + (p - 1)\beta$$

qui se réduit à

$$\xi_1 + (p - 1)(\alpha - \beta) = \eta_1 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha + \pi - \rho).$$

Cette expression doit être vérifiée quelle que soit la valeur de p, il faut donc que $\alpha = \beta$, ce qui est d'ailleurs évident à priori. On a finalement l'équation indéterminée à deux inconnues

$$\xi_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha + \pi - \rho).$$

On peut donc à priori se donner la valeur d'une des coordonnées, l'autre sera calculée par cette expression ; les diverses solutions se trouvent sur une parallèle à la diagonale montante.

Cherchons la case de départ dans la première colonne du carré ; on devra pour cela faire $\xi_1 = 0$, on en déduit

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \rho - \pi - \beta).$$

Comme application faisons

$$\pi = 0 \quad \rho = -5 \text{ pour } n = 7.$$

Nous obtiendrons

$$\eta_1 = 1.$$

— Imposons-nous maintenant la condition que la colonne médiane du groupe occupe la diagonale descendante du carré.

Les coordonnées dans le carré du nombre médian de la ligne de rang m du groupe, sont

$$\xi_1 + (m-1)(\pi - \alpha) - \frac{1}{2}\alpha$$

$$\eta_1 + (m-1)(\rho - \beta) - \frac{1}{2}\beta.$$

on devra donc poser l'équation

$$\xi_1 + (m-1)(\pi - \alpha) - \frac{1}{2}\alpha = (n-1) - \left[\eta_1 + (m-1)(\rho - \beta) - \frac{1}{2}\beta\right]$$

qui devient après réduction

$$\xi_1 + \eta_1 = (m-1)(\alpha + \beta - \pi - \rho) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1.$$

Elle doit être satisfaite quel que soit m ; on aura donc

$$\alpha + \beta - \pi - \rho = 0$$

et l'équation devient finalement

$$\xi_1 + \eta_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1.$$

Si l'on suppose $\pi = 0$ on devra avoir $\rho = \alpha + \beta$. Donc dans les carrés de degré non complexe (ceux pour lesquels on a $\pi = 0$) la colonne médiane du groupe fondamental ne peut occuper la diagonale descendante que si $\rho = \alpha + \beta$.

Considérons comme application les carrés cavaliers d'un pas quelconque mais dans lesquels $\alpha = 1$: ρ est alors égal à $(\beta + 1)$, le degré de ces carrés est par suite égal à $(n - \beta - 1)$; et comme la somme du pas et du degré devient dans ce cas égal à $(n - 1)$, ce sont des carrés limites. Ce qui a été dit dans la première partie à cet égard se trouve ainsi justifié.

Si l'on veut construire un carré de ce type en plaçant par exemple le premier nombre du groupe dans la première colonne du carré, c'est-à-dire sur son axe vertical, ce nombre devra occuper sur cet axe la case ayant pour ordonnée

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1.$$

Soit un carré cavalier simple de degré 1 et de 2 pas, pour lequel on a par conséquent $\alpha = 1$ $\beta = 2$ $\pi = 0$ et $\rho = -1$; la case de départ dans la première colonne aura pour ordonnée $\eta_1 = \frac{n-3}{2}$ ce qu'il est aisé de vérifier.

Considérons en troisième lieu le cas où la ligne et la colonne magiques du groupe occupent les deux diagonales du carré.

On doit dans les deux expressions données plus haut, faire en même temps $m = \frac{n+1}{2}$ et $p = \frac{n+1}{2}$. Les coordonnées de la case de départ doivent satisfaire aux deux congruences :

$$\xi_1 + \frac{n-1}{2}(\pi - \alpha) + \frac{n-1}{2}\alpha = \eta_1 + \frac{n-1}{2}(\rho - \beta) + \frac{n-1}{2}\beta$$

$$\xi_1 + \frac{n-1}{2}(\pi - \alpha) + \frac{n-1}{2}\alpha = n - 1) - \left[\eta_1 + \frac{n-1}{2}(\rho - \beta) + \frac{n-1}{2}\beta\right]$$

qui se réduisent à

$$\xi_1 - \eta_1 = \frac{1}{2}(\pi - \rho)$$

$$\xi_1 + \eta_1 = \frac{1}{2}(\pi + \rho) - 1$$

d'où

$$\xi_1 = \frac{\pi - 1}{2} \quad \text{et} \quad \eta_1 = \frac{\rho - 1}{2}.$$

Soit comme exemple $\pi = 0$ $\rho = -1$; la case de départ aura pour coordonnées

$$\xi_1 = \frac{-1}{2} \equiv \frac{n-1}{2} \quad \text{et} \quad \eta_1 = -1$$

C'est la case centrale de la ligne supérieure du carré.

Soit encore $\pi = 0$ et $\rho = -5$; nous aurons

$$\xi_1 = -\frac{1}{2} \equiv \frac{n-1}{2} \quad \text{et} \quad \eta_1 = -3 \equiv n - 3.$$

Ici, la case de départ se trouvera sur la colonne médiane du carré. Si l'on suppose $n = 7$ cette case se trouvera immédiatement au-dessus de la case centrale.

— On peut se proposer de calculer le nombre occupant une case donnée du carré magique.

On suppose que l'on prend pour base le groupe naturel. Le nombre ayant pour coordonnées dans ce groupe r et s, sa valeur sera exprimée par

(12) $$1 + r + ns.$$

Ce nombre occupe dans le carré, la case des coordonnées p et q ; remplaçons r et s par leurs valeurs (2) en fonction de p, q et des paramètres de transformation, l'expression précédente deviendra :

(13) $$1 + (pa + qa') + (pb + qb')n,$$

Le problème est ainsi résolu. Il est bien entendu que dans les applications numériques, chacun des termes entre parenthèses devra être remplacé par sa valeur congrue la plus réduite, eu égard au module n du carré. Si au lieu des paramètres de transformation, on a comme données les caractéristiques du carré, on écrira :

$$r = \frac{p(\rho - \beta) + q(\alpha - \pi)}{\rho\alpha - \pi\beta}$$

et

$$s = \frac{-p\beta + q\alpha}{\rho\alpha - \pi\beta}.$$

Par suite la valeur du nombre occupant la case (p,q) du carré sera donnée par la formule,

$$(14) \qquad N = 1 + \frac{p(\rho - \beta) + q(\alpha - \pi)}{\rho\alpha - \pi\beta} + \frac{q\alpha - p\beta}{\rho\alpha - \pi\beta}\, n.$$

Ici comme plus haut, on devra substituer à la valeur numérique de chacun des termes fractionnaires, sa valeur congrue positive la plus réduite par rapport au module.

— Pour l'application de cette expression, il n'est pas nécessaire que l'unité occupe la case origine du carré. Quelle que soit la case occupée par l'unité, on pourra l'adopter comme origine. Il faudra dans ce cas modifier les expressions (3) de p et de q données plus haut et qui supposent une même origine pour le groupe et le carré. C'est une simple question de changement de coordonnées. Si γ et δ sont les coordonnées dans le carré de la case occupée par l'unité, il faudra pour effectuer ce changement remplacer p et q par $(p - \gamma)$ et $(q - \delta)$.

— Considérons comme exemple le carré oblique simple déduit du groupe naturel. Pour que la ligne magique du groupe occupe la diagonale montante du carré il faut, si l'on veut placer l'unité dans la première colonne, l'inscrire dans la case ayant pour ordonnée $\frac{n-1}{2}$. Introduisons dans l'expression (14) les valeurs $\alpha = \beta = 1$

$\pi = 0$ $\rho = -1$ et remplaçons-y q par $\left(q - \frac{n-1}{2} \equiv q + \frac{1}{2}\right)$, nous obtiendrons :

$$N = 1 + \left(2p - q - \frac{1}{2}\right) + \left(p - q - \frac{1}{2}\right)n.$$

Supposons $n = 5$; le nombre qui dans le carré magique occupera la case $p = 3$ et $q = 2$ sera

$$N = 1 + \left(6 - 2 - \frac{1}{2}\right) + \left(3 - 2 - \frac{1}{2}\right)n$$
$$= 1 + \left(4 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)n$$

or pour $n = 5$, $\frac{1}{2} \equiv 3$; par suite la première parenthèse doit être remplacée par 1 et la seconde par 3 ; le nombre cherché est donc 17. On verra de même que le nombre qui occupe la case $p = 4$ et $q = 3$ est 18.

Les nombres de la diagonale montante du carré seront obtenus en faisant $p = q$; ils seront donnés par l'expression

$$1 + \left(p - \frac{1}{2}\right) + 2n.$$

En donnant à p les valeurs successives 0 — 1 — 2 — 3 — 4, on obtient bien la suite 13 — 14 — 15 — 11 — 12. Soit encore $n = 7$. Cherchons le nombre occupant la case origine ; nous poserons pour cela $p = q = 0$ d'où

$$N_0 = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)n$$

or, pour ce module

$$\frac{1}{2} \equiv 4 \equiv -3 \quad \text{par suite} \quad N_0 = 1 + 3 + 3n = 25.$$

Pour $p = q = 3$ $\quad N = 28$
$p = q = 4$ $\quad N = 22.$

Ainsi la formule (14) permet de calculer tous les nombres d'un carré magique ; il n'est donc pas nécessaire de le construire pour connaître la position occupée par chacun d'eux.

— La même formule permet aussi de déterminer le nombre occupant une case (p,q) du carré déduit d'un groupe fondamental quelconque. En effet on supposera le carré déduit du groupe naturel ; la case (p,q) du carré correspond dans ce groupe naturel à un nombre de coordonnées r et s ; ce sont aussi les coordonnées du nombre cherché dans le groupe considéré.

— L'expression (14) peut être considérée comme définissant un plan dans l'espace, mais ses seuls points utiles sont ceux de valeur entière correspondant à des valeurs également entières et inférieurs à n de p et de q.

— Si dans (14) on attribue à p une valeur constante, on obtiendra les nombres qui se suivent dans une même colonne du carré en remplaçant q par les valeurs $0 - 1 - 2 \ldots. (n-1)$.

En attribuant à q une valeur constante, on peut de même obtenir les nombres qui constituent les diverses lignes du carré.

Soit comme application le carré cavalier du type $\alpha = 1$ $\pi = 0$ $\beta = 2$ et $\rho = 1$; l'expression (14) se réduit à

$$N = 1 + (3p - q) + (2p - q)n.$$

Cherchons dans le carré de module 7, les nombres de la quatrième colonne. Ils correspondent à $p = 3$; remplaçons successivement q par les valeurs $0 - 1 - 2 \ldots 6$, nous obtiendrons (c'est à dessein que nous indiquons le détail des calculs, afin d'en bien montrer le mécanisme).

$$\begin{aligned}
N_0 &= 1 + 9 + 6n \equiv 1 + 2 + 6.7 = 45\\
N_1 &= 1 + (9 - 1) + 5n \equiv 1 + 1 + 5.7 = 37\\
N_2 &= 1 + (9 - 2) + 4n \equiv 1 + 0 + 4.7 = 29\\
N_3 &= 1 + (9 - 3) + 3n \equiv 1 + 6 + 3.7 = 28\\
N_4 &= 1 + (9 - 4) + 2n \equiv 1 + 5 + 2.7 = 20\\
N_5 &= 1 + (9 - 5) + n \equiv 1 + 4 + 7 = 12\\
N_6 &= 1 + (9 - 6) = 1 + 3 + = 4.
\end{aligned}$$

Ce sont bien les nombres qui constituent la colonne médiane du carré, l'origine étant occupée par l'unité. Si nous supposons $n = 11$ et $p = 5$, nous trouvons que les nombres occupant la sixième colonne du carré sont :

115 — 103 — 91 — 79 — 67 — 66 — 54 — 42 — 30 — 18 — 6.

Faisons encore une application de l'expression à un carré cavalier du type

$$\alpha = 1 \quad \beta = 5 \quad \pi = 0 \quad \rho = -3$$

le module étant égal à 11.

Un nombre de ce carré est défini par,

$$N = 1 + \left(\frac{8}{3}p - \frac{q}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}p - \frac{q}{3}\right)n$$

les termes fractionnaires devant d'ailleurs être remplacés par les entiers qui leur sont congrus.

On a tout d'abord pour le module donné

$$\frac{8}{3} \equiv \frac{-11+8}{3} = \frac{-3}{3} = -1 \equiv 10$$
$$-\frac{1}{3} \equiv \frac{-11-1}{3} = \frac{-12}{3} = -4 \equiv 7$$
$$\frac{5}{3} \equiv \frac{22+5}{3} = \frac{27}{3} = 9.$$

Par suite :

$$N = 1 + (10p + 7q) + (9p + 7q)n.$$

Si l'on fait $q = 0$, on obtient les nombres de l'axe horizontal du carré. Ils seront donnés par

$$N = 1 + 10p + 9pn$$

on a ainsi pour cette suite :

1 — 110 — 87 — 64 — 41 — 18 — 116 — 98 — 70 — 47 — 24

la somme est bien égale à la constante magique 671. Pour calculer les nombres occupant chacune des lignes suivantes, il faudra successivement donner à q les valeurs 1 à 10. Les expressions qui les fournissent seront donc

$$1 + (10p + 7) + (9p + 7)n$$
$$1 + (10p + 14) + (9p + 14)n \equiv 1 + (10p + 3) + (9p + 3)n$$
$$1 + (10p + 21) + (9p + 21)n \equiv 1 + (10p + 10) + (9p + 10)n$$

. . . .

. . . .

$$1 + (10p + 70) + (9p + 70)n \equiv 1 + (10p + 4) + (9p + 4)n.$$

On obtient ainsi par ce procédé le carré magique ci-après que la méthode directe aurait aussi bien fourni.

49	26	3	101	78	66	43	20	118	95	72
97	74	51	28	5	103	80	57	34	22	120
13	111	99	76	53	30	7	105	82	59	36
61	38	15	113	90	67	55	32	9	107	84
109	86	63	40	17	115	92	69	46	23	11
25	2	100	88	65	42	19	117	94	71	48
73	50	27	4	102	79	56	44	21	119	96
121	98	75	52	29	6	104	81	58	35	12
37	14	112	89	77	54	31	8	106	83	60
85	62	39	16	114	91	68	45	33	10	108
1	110	87	64	41	18	116	93	70	47	24

Fig. 81

— L'unité étant placée à l'origine du carré, on peut facilement, au moyen de la même formule, calculer les nombres qui doivent occuper les trois autres sommets

Pour le sommet (1) on a $p = (n - 1)$ et $q = 0$

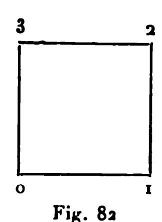


Fig. 82

d'où

$$N_1 = 1 + \frac{(n-1)(\rho - \beta)}{\rho\alpha - \pi\beta} - \frac{(n-1)\beta}{\rho\alpha - \pi\beta} n.$$

Le sommet *2* est défini par $p = q = n - 1 \equiv -1$ et le sommet *3* par $p = 0$ $q = n - 1 \equiv -1$; on aura donc :

$$N_2 = 1 + \frac{\beta + \pi - \alpha - \rho}{\rho\alpha - \pi\beta} + \frac{\beta - \alpha}{\rho\alpha - \pi\beta} n$$

et

$$N_3 = 1 + \frac{\pi - \alpha}{\rho\alpha - \pi\beta} + \frac{-\alpha}{\rho\alpha - \pi\beta} n.$$

Pour la case centrale

$$p = q = \frac{n-1}{2} \equiv -\frac{1}{2},$$

on a

$$N = 1 + \frac{\pi + \beta - \alpha - \rho}{2(\rho\alpha - \pi\beta)} + \frac{\beta - \alpha}{2(\rho\alpha - \pi\beta)} n.$$

On peut appliquer cesformu les aux nombreux carrés donnés dans la première partie et procéder aussi par ce moyen à leur vérification.

— Tout ce qui précède s'applique intégralement à tous les carrés magiques impairs. Lorsqu'il s'agit de modules premiers, on sait qu'une direction quelconque prise dans le groupe fondamental donne une *ligne magique* ; mais il n'en est pas toujours ainsi lorsqu'il s'agit

d'un module composé. Lorsque la direction adoptée contient un paramètre non premier avec le module, il n'y a que certaines lignes parallèles à cette direction qui jouissent de la propriété magique, (à moins que le groupe naturel ait subi une transformation convenable, auquel cas *toute direction* inclinée sur les axes donne n nombres différents ou non, mais dont la somme est magique).

Le calcul s'applique aussi à la recherche de ces lignes.

Soit une direction $\xi = ax + by$ et soient r et s les coordonnées, dans le groupe naturel, du nombre qui produira une somme magique, si l'on débute par lui. Ce nombre M est égal à

$$M = 1 + r + ns$$

et ceux qui le suivront seront, chacun à une constante n près

$$M + a + bn$$

$$M + 2a + 2bn$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$M + (n-1)\,a + (n-1)\,bn.$$

Leur somme est égale à

$$n(1 + r + ns) + (1 + 2 + \ldots + n - 1)(a + bn) =$$

$$n(1 + r + ns) + \frac{n(n-1)}{2}(a + bn) = n\left\{1 + r + ns + \frac{n-1}{2}(a + bn)\right\}.$$

Elle doit-être congrue à la somme magique $\frac{n(n^2+1)}{2}$. Ecrivons donc l'égalité et nous aurons, après suppression du facteur n commun aux deux membres,

$$1 + r + ns + \frac{n-1}{2}(a + bn) = \frac{n^2+1}{2}.$$

Cette congruence de module n se réduit finalement à

$$(15) \qquad 1 + r - \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad r = \frac{a - 1}{2}$$

on a ainsi l'abscisse du nombre qui fournira une somme magique dans la direction donnée ; les essais à faire se réduisent donc aux nombres de la colonne de rang

$$(r + 1) \quad \text{ou} \quad \frac{a + 1}{2},$$

La ligne magique cherchée contient un nombre congru à

$$\frac{a + 1}{2} \text{ (1)}.$$

— Nous bornerons les applications aux modules 9 et 15. Le lecteur pourra facilement les étendre à d'autres modules.

1° *Module* 9. — Soit une direction $\xi = 3x + by$ dont le paramètre a est un facteur du module ; b étant supposé *premier* avec ce module, pourra prendre l'une des valeurs

1, 2, 4, 5, 7 et 8.

La formule (15) ci-dessus calculée donne

$$r = \frac{a - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

nous débuterons donc, pour constituer une ligne magique, par un nombre de la deuxième colonne. Nous trouvons que tous les nombres de cette colonne, ainsi que ceux appartenant aux colonnes de rang 5 et 8, donnent des séries magiques. En effet constituons les séries

(1) Voir la note II insérée à la fin de ce travail.

commençant par les nombres 2, 5 et 8, le paramètre b étant égal à l'unité :

2, 14, 26, 29, 41, 53, 56, 68, 80

5, 17, 20, 32, 44, 47, 59, 71, 74

8, 11, 23, 35, 38, 50, 62, 65, 77.

Ces trois séries contiennent on le voit tous les nombres appartenant aux trois colonnes désignées.

On pourra donc débuter par l'un quelconque d'entre eux, la série formée sera toujours magique.

On peut vérifier, et la réflexion aussi le fait prévoir, que quelle que soit la valeur (parmi celles plus haut indiquées) que l'on donne au paramètre b, les solutions du problème sont constituées par les mêmes nombres.

Les conclusions sont les mêmes pour le cas où a est égal à 6, le paramètre b étant toujours premier avec le module.

Considérons en second lieu les directions définies par le paramètre b égal à 3 ou à 6, le paramètre a étant *premier* avec le module. Soit d'abord $a = 1$; on trouvera le nombre de début dans la colonne ayant pour abscisse

$$r = \frac{a-1}{2} = 0$$

c'est-à-dire la première colonne. Le nombre 10 situé dans cette colonne satisfait à la question ; il en est de même pour les nombres 37 et 64 appartenant aux lignes de rang 5 et 8. Si l'on fait $b = 3$, on trouve les trois séries magiques

10, 38, 66, 13, 41, 69, 16, 44, 72

37, 65, 12, 40, 68, 15, 43, 71, 18

64, 11, 39, 67, 14, 42, 70, 17, 45.

On constate que tous les nombres appartenant aux *lignes de rang* 2, 5 et 8 sont des solutions du problème, (dans les deux systèmes de séries que l'on a indiquées, les nombres verticaux du groupe dans le premier et les nombres horizontaux dans le second sont, ainsi qu'on l'indique par des lignes ponctuées, disposés diagonalement).

Les nombres constituant les trois séries qui précèdent sont aussi solutions pour a quelconque premier avec le module.

La direction $\xi = ax + 6y$ a également les mêmes solutions.

On peut remarquer que les nombres qui se trouvent aux points de croisement des lignes et des colonnes ayant pour rang 2, 5, et 8, soit les nombres

$$11,\ 14,\ 17,\ 38,\ 41,\ 44,\ 65,\ 68,\ 71$$

ont une somme magique.

2° *Module* 15. — Soit d'abord b seulement *premier* avec le module ; considérons la direction

$$\xi = 3x + by.$$

On peut constater que quel que soit b, *tous les nombres* appartenant aux colonnes de rang 2, 5, 8, 11 et 14 constituent des solutions du problème. Ci-après pour $b = 1$, quelques-unes de ces séries

2,	20,	38,	56,	74,	77,	95,	113,	131,	149,	152,	170,	188,	206,	224
17,	35,	53,	71,	89,	92,	110,	128,	146,	164,	167,	185,	203,	221,	14
32,	50,	68,	86,	104,	107,	125,	143,	161,	179,	182,	200,	218,	237,	29
47,	65,	83,	101,	119,	122,	140,	158,	176,	194,	197,	215,	8,	26,	44

et ainsi de suite. Les séries étant disposées, comme ci-dessus, on voit que les nombres qui se trouvent sur une même verticale appartiennent à une même colonne du groupe fondamental. Soit maintenant la direction

$$\xi = 5x + by.$$

Le nombre de début doit être cherché dans la colonne ayant pour abscisse

$$r = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

Supposons $b = 1$; tous les nombres de la troisième colonne sont des solutions du problème ; il en est de même des nombres appartenant aux colonnes de rang 8 et 13, distants horizontalement de 5 unités, dans le groupe naturel. Chaque ligne du groupe naturel contient donc trois solutions. Ci-après trois séries débutant par des nombres de la 3e colonne.

3, 23, 43, 48, 68, 88, 93, 113, 133, 138, 158, 178, 183, 203, 223
18, 38, 58, 63, 83, 103, 108, 128, 148, 153, 173, 193, 198, 218, 13
33, 53, 73, 78, 98, 118, 123, 143, 163, 168, 188, 208, 213, 8, 28

Quelle que soit la valeur de b, les solutions ne varient pas.

Soit maintenant a *premier* avec le module et b non premier avec ce même module, comme par exemble

$$\xi = ax + 3y.$$

Pour $a = 1$, nous chercherons les solutions dans la première colonne. Nous trouvons que le nombre 16 et tous ceux qui se trouvent dans la même ligne sont des solutions. Ainsi :

16, 62, 108, 154, 200, 21, 67, 113, 159, 205, 26, 72, 118, 164, 210
17, 63, 109, 155, 201, 22, 68, 114, 160, 206, 27, 73, 119, 165, 196
18, 64, 110, 156, 202, 23. 69, 115, 161, 207, 28, 74, 120, 151, 197
. . . .
30, 61, 107, 153, 199, 20, 66, 112, 158, 204, 25, 71, 117, 163, 209

Seuls les nombres appartenant aux lignes de rang 2, 5, 8, 11 et 14 distantes verticalement de 3 en 3 unités fournissent toutes les solutions du problème. Quel que soit a premier avec le module, les solutions ne changent pas.

Soit en dernier lieu, a étant *premier* avec le module

$$\xi = ax + 5y$$

supposons d'abord $a = 1$. Le nombre 31 et tous ceux appartenant à la même ligne réussissent. Les lignes de 5 en 5 à partir de celle-ci

donnent aussi des solutions du problème ; ce sont celles commençant par 106 et 181. Ci-après quelques-unes de ces séries magiques.

31, 107, 183, 34, 110, 186, 37, 113, 189, 40, 116, 192, 43, 119, 195
32, 108, 184, 35, 111, 187, 38, 114, 190, 41, 117, 193, 44, 120, 181
33, 109, 185, 36, 112, 188, 39, 115, 191, 42, 118, 194, 45, 106, 182

En commençant chacune des séries par les nombres successifs d'une même ligne, on voit que les nombres disposés sur une même verticale appartiennent à une même ligne du groupe. Quel que soit a, les solutions sont constituées par les mêmes nombres.

— On peut de ce qui précède, tirer les conclusions suivantes :

1° Si a est premier avec le module et si b contient un facteur premier k commun avec ce module, tous les nombres de la ligne dans laquelle se trouve une solution rendant la direction $(ax + by)$ magique, sont également des solutions. Mais dans une même colonne, les solutions sont espacées de k en k.

2° Si au contraire b, est premier avec le module et si a contient un facteur premier k du module, tous les nombres de la colonne contenant une solution du problème, satisfont à la condition de donner des sommes magiques ; mais dans une même ligne, ces solutions sont espacées de k en k.

— En conséquence, si l'on se propose de constituer deux séries magiques suivant deux directions dont le paramètre a de l'une et le paramètre b de l'autre sont seuls premiers avec le module, les deux autres paramètres ayant avec ce dernier un même facteur premier k, on cherchera les solutions aux points de croisement des lignes et colonnes satisfaisant à la question pour chacune des deux directions données. Ces solutions seront donc espacées de k en k en ligne et en colonne.

— Essayons maintenant de chercher les sommes magiques dans direction pour laquelle les deux paramètres contiennent chacun une un facteur premier non identique du module.

Soit par exemple pour $n = 15$, la direction

$$\xi = 3x + 5y.$$

Eu égard au paramètre 3, on devrait pour construire une série magique, débuter par un nombre appartenant aux colonnes de rang 2, 5, 8, 11 et 14 ; eu égard au paramètre $b = 5$, le nombre de début doit être pris dans les lignes de rang 3, 8 et 13. Par suite pour satisfaire au problème, on adoptera comme point de départ un des nombres occupant les points de croisement de ces lignes et colonnes. Quel que soit celui de ces nombres que l'on adopte, la série est uniquement constituée par les nombres qui se présentent dans l'ordre :

32, 110, 188, 41, 119, 182, 35, 113, 191, 44, 107, 185, 38, 116, 194.

— Soit maintenant pour le même module, la direction

$$\xi = 5x + 3y \text{ (1)}.$$

Les points de croisement des lignes de rang 2, 5, 8, 11 et 14 et des colonnes de rang 3, 8 et 13, constituent les solutions du problème.

(1) Les directions

$$\xi = 4x + 3y \quad \text{et} \quad \eta = -x - y$$

donnent un carré magique pour le groupe transformé du module 9 (1e partie page 45).

Essayons de construire le carré en partant du groupe naturel. Nous constatons d'abord que, eu égard à la première des deux directions principales, le nombre que l'on doit placer dans la case origine doit appartenir à *l'une des lignes* de rang 2, 5 ou 8.

Eu égard à l'équation

$$\xi + \eta = 3x + 2y,$$

le nombre par lequel on doit débuter doit appartenir à l'une des *colonnes* de rang 2, 5 ou 8. Formons donc le carré en débutant par l'un des nombres situé aux croisements de ces deux systèmes, soit le nombre 11. L'équation des colonnes du carré montre que chaque colonne contient un nombre ap-

La série est, comme dans le cas précédent, unique et l'ordre de ses éléments est :

18, 68, 118, 153, 203, 28, 63, 113, 163, 198, 23, 73, 108, 158, 208.

partenant à chacune des lignes du groupe fondamental ; par suite, la première colonne qui débute par le nombre 11 et qui est forcément magique, ne contient que trois nombres appartenant aux lignes de rang 2, 5 et 8. Les lignes du carré correspondant à ces trois nombres seules seront magiques, les autres ne le seront pas. Ci-dessous ce carré dont on a marqué d'une croix, les lignes magiques qui débutent par les nombre 11, 71 et 41 occupant dans le groupe les points de croisement plus haut indiqués.

	21	52	74	24	46	77	27	49	80
	31	62	3	34	56	6	28	59	9
+	41	72	13	44	66	16	38	69	10
	51	73	23	54	76	26	48	79	20
	61	2	33	55	5	36	58	8	30
+	71	12	43	65	15	37	68	18	40
	81	22	53	75	25	47	78	19	50
	1	32	63	4	35	57	7	29	60
+	11	42	64	14	45	67	17	39	70

Fig. 83

— On peut établir à priori que les deux directions

$$\xi = 8x + y \qquad \text{et} \qquad \eta = 5x + 2y$$

par exemple, ne donnent pas de carré magique pour le groupe naturel de module 15. En effet

$$\xi + \eta = 13x + 3y.$$

Les solutions possibles pour un nombre de cette diagonale, sont contenues dans les lignes de rang 2, 5, 8, 11 et 14. L'équation descolonnes

— On a vu dans la note I qui termine la première partie, que des groupes différents peuvent fournir un même carré magique. Le calcul éclaire entièrement la question. On a construit un carré en partant d'un groupe donné. Une permutation ordonnée ou régulière des lignes de ce groupe donnera un groupe nouveau dépendant du premier suivant une certaine loi. Ainsi tout en conservant son rang à la première ligne du groupe donné, nous constituerons de nouveaux groupes en prenant dans le premier les lignes de deux en deux, de trois en trois... et enfin de $(n - 1)$ en $(n - 1)$. Si ces intervalles sont premiers avec le module, on rencontrera ainsi toutes les lignes du groupe donné, c'est-à-dire que les nouveaux groupes comprendront toutes les lignes de ce dernier dans un ordre différent. Par ces arrangements, l'ordre des nombres d'une même ligne ne change pas, celui des nombres d'une même colonne a seul varié. Le carré donné peut être déduit de chacun de ces groupes ; ce que nous avons appelé *son pas* reste évidemment invariable, quel que soit le groupe pris pour base ; *son degré seul aura changé*.

On peut modifier également l'ordre des colonnes du groupe primitif ; une modification bien définie de cet ordre changera le pas du carré ainsi que son degré. Par un changement convenable du groupe fondamental, on pourra réduire un pas complexe à son expression la plus simple. En effet, si l'on examine dans un carré magique la disposition relative des nombres d'une ligne ou d'une colonne du groupe, on constate que deux nombres appartenant à une même ligne ou à une même colonne se trouvent dans deux li-

$\eta = 5x + 2y$ exigent que tous les nombres du carré appartiennent aux colonnes de rang 3, 8 et 13 dans le groupe. Pour que ces colonnes soient magiques, il faut donc que *tous les nombres de la diagonale montante* appartiennent exclusivement à ces trois colonnes, ce qui n'est pas, étant donnée son équation. Donc tout nombre de cette diagonale qui n'appartient pas aux colonnes de rang 3, 8 et 13 du groupe, occupera dans le carré une colonne dont tous les nombres seront pris horizontalement de 5 en 5 dans le groupe. Ils appartiendront ainsi à des colonnes différentes de celles satisfaisant à la question.

gnes et deux colonnes différentes du carré, de sorte que l'on peut toujours prendre, dans deux lignes ou deux colonnes voisines de ce dernier, les nombres d'une même ligne ou d'une même colonne du groupe et les considérer comme se suivant dans le groupe. Il s'ensuit que l'un des deux paramètres de marche pourra être réduit à l'unité. Si c'est le paramètre α que l'on réduit ainsi, la marche des nombres d'une même ligne s'effectuera dans le sens vertical et si c'est le paramètre β, l'avancement des nombres s'effectuera dans le sens horizontal.

La disposition oblique est définie par le fait que les deux caractéristiques sont égales à l'unité. Ce sont leurs valeurs les plus réduites. Il est facile de traduire concrètement ces considérations.

Soient α et β les caractéristiques *différentes de l'unité* de la marche des nombres appartenant à une ligne du groupe donné. Soient ξ et η dans le carré les coordonnées du premier nombre de cette ligne ; les nombres suivants auront pour coordonnées

$$\begin{array}{ll} \xi + \alpha & \eta + \beta \\ \xi + 2\alpha & \eta + 2\beta \\ \xi + 3\alpha & \eta + 3\beta \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \xi + (n-1)\alpha & \eta + (n-1)\beta \end{array}$$

Si α et n sont premiers entre eux et (α est naturellement inférieur à n), il existe toujours un multiple $k\alpha$ et un seul qui soit congru à l'unité pour le module n (on dit dans ce cas que k et α sont *associés* pour ce module). Si α et n ne sont pas premiers entre eux, le produit $k\,\alpha$ ne peut être congru à l'unité.

Ceci étant, pour les cas de modules premiers (et aussi pour celui où α et n sont premiers entre eux, il y aura toujours une des abscisses $(\xi + k\alpha)$ de la série qui se réduira à $(\xi + 1)$. Si donc on transforme le groupe de façon que le nombre ayant cette abscisse dans le carré, occupe dans le groupe le second rang, que celui ayant l'abscisse $(\xi + 2k\alpha) \equiv \xi + 2$ occupe le troisième rang etc... que celui enfin

ayant l'abscisse $(\xi + pk\alpha) = \xi + p$ occupe dans le groupe le $(p+1)^{\text{eme}}$ rang, le carré pourra être considéré comme déduit du groupe transformé suivant une marche dont la caractéristique α sera réduite à l'unité; on pourrait aussi bien au lieu de α réduire la caractéristique β.

— Le procédée st le même pour le cas où l'on voudrait effectuer une réduction analogue sur la marche des nombres d'une colonne du groupe. Si l'on représente par ξ et η les coordonnées dans le carré du premier nombre d'une colonne, les coordonnées des nombres successifs de cette colonne seront (page 81).

$$
\begin{array}{ll}
\xi + (\pi - \alpha) & \eta + (\rho - \beta) \\
\xi + 2(\pi - \alpha) & \eta + 2(\rho - \beta) \\
\xi + 3(\pi - \alpha) & \eta + 3(\rho - \beta) \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\xi + (n-1)\,\pi - \alpha) & \eta + (n-1)\,(\rho - \beta
\end{array}
$$

les quantités π et ρ étant les caractéristiques du degré.

Pour résoudre le problème, il suffira de chercher l'associé de $(\pi - \alpha)$ ou de $(\rho - \beta)$ par rapport au module. Si k est ce nombre associé, on modifiera le groupe de façon à porter au deuxième rang la ligne qui y occupe le rang k après la première, au troisième rang celle qui y occupe le rang $2k$ et ainsi de suite.

— On peut aussi réduire les caractéristiques du degré. Les coordonnées du dernier nombre de la première ligne sont, celles du premier étant ξ et η, $(\xi - \alpha)$ et $(\eta - \beta)$; les coordonnées du premier nombre de la ligne de rang m sont

$$\xi + (m-1)(\pi - \alpha) \quad \text{et} \quad \eta + (m-1)(\rho - \beta).$$

Les différences respectives donnent les caractéristiques du degré. En supposant que la ligne de rang m ait passé au second rang ces caractéristiques seraient donc

$$
\begin{aligned}
(m-1)(\pi - \alpha) + \alpha &= m(\pi - \alpha) - \pi + 2\alpha \\
(m-1)(\rho - \beta) + \beta &= m(\rho - \beta) - \rho + 2\beta.
\end{aligned}
$$

On peut essayer de rendre une de ces caractéristiques égale à zéro ou à l'unité. La valeur de m qui satisferait aux égalités ou congruences ainsi posées, serait la solution du problème.

— Nous reprendrons la même question sous une autre forme.

Opérons un changement ordonné des lignes du groupe. Prenons par exemple ces lignes de deux en deux, la première conservant son rang. Ainsi la 3e ligne passera au deuxième rang, la cinquième au troisième, la septième au quatrième et ainsi de suite.

Le premier nombre de la deuxième ligne du nouveau groupe ayant dans le carré les coordonnées

$$\xi_1 + 2(\pi - \alpha) \quad \text{et} \quad \eta_1 + 2(\rho - \beta)$$

et le dernier nombre de la première ligne ayant pour coordonnées $(\xi - \alpha)$ et $(\eta - \beta)$, les différences respectives de ces coordonnées donneront les caractéristiques du degré du carré pour ce nouveau groupe. Ces différences sont

$$\xi + 2(\pi - \alpha) - (\xi - \alpha) = 2\pi - \alpha$$
$$\eta + 2(\rho - \beta) - (\eta - \beta) = 2\rho - \beta.$$

On retrouvera identiquement ces expressions en calculant ces mêmes différences pour la cinquième ligne qui a passé au 3e rang. On a effectivement

$$\xi + 4(\pi - \alpha) - (\xi + 2\pi - 3\alpha) = 2\pi - \alpha$$
$$\eta + 4(\rho - \beta) - (\eta + 2\rho - 3\beta) = 2\rho - \beta.$$

Ainsi en adoptant l'ordre des lignes de deux en deux, le carré qui, pour le groupe primitif, était du degré $(\pi\xi + \rho\eta)$, sera par rapport au nouveau groupe, du degré

$$(2\pi - \alpha)\xi + (2\rho - \beta)\eta.$$

Si le groupe primitif était modifié de façon que la succession des lignes fut de m en m, c'est-à-dire que la m^{eme} ligne (la ligne de rang m) passât au 2me rang, que la $(2\,m)^{eme}$ passât au troisième et

ainsi de suite, le degré du carré par rapport au nouveau groupe serait

$$\left\{ (m-1)\pi - (m-2)\alpha \right\} \xi + \left\{ (m-1)\rho - (m-2)\beta \right\} \eta$$

Soit par exemple un carré de module 7, déduit du groupe naturel dont la ligne magique seule a été déplacée pour être portée au premier rang ; les nombres de la première colonne du groupe sont donc

$$22 - 1 - 8 - 15 - 29 - 36 - 43.$$

Tirons-en le carré oblique de degré $(-\xi - 2\eta) \equiv 6\xi + 5\eta$ ci-dessous

3	13	16	33	36	46	28
12	15	32	42	45	27	2
21	31	41	44	26	1	11
30	40	43	25	7	10	20
29	49	24	6	9	19	29
48	23	5	8	18	35	38
22	4	14	17	34	37	47

Fig. 84

On peut vérifier que les membres d'une même colonne suivent la marche $(5\xi + 4\eta)$ ou $(-2\xi - 3\eta)$. Modifions maintenant le groupe en en prenant les lignes de deux en deux ; la première colonne du nouveau groupe sera formée par la suite

$$22.\ 8.\ 29.\ 43.\ 1.\ 15.\ 36,$$

Le degré du carré précédent considéré comme déduit de ce nouveau groupe, s'obtiendra en faisant $m = 3$ dans la formule ci-dessus. D'autre part, on a ;

$$\alpha = \beta = 1 \quad \pi = 6 \quad \rho = 5$$

le degré cherché est, ainsi qu'on peut le vérifier, $(4\xi + 2\eta)$. Pour

$m = 4$	ce degré devient		$2\xi + 6\eta$
$m = 5$	«	«	3η
$m = 6$	«	«	5η
$m = 7$	«	«	$3\xi + 4\eta$.

Dans ces diverses hypothèses, l'ordonnance des nombres d'une même colonne du groupe est fournie par les expressions

$$
\begin{aligned}
2(\pi - \alpha)\xi + 2(\rho - \beta)\eta &= 3\xi + \eta \\
3(\pi - \alpha)\xi + 3(\rho - \beta)\eta &= \xi + 5\eta \\
4(\pi - \alpha)\xi + 3(\rho - \beta)\eta &= 6\xi + 2\eta \\
5(\pi - \alpha)\xi + 3(\rho - \beta)\eta &= 4\xi + 6\eta \\
6(\pi - \alpha)\xi + 3(\rho - \beta)\eta &= 2\xi + 3\eta.
\end{aligned}
$$

— Les développements fournis dans cette partie de notre travail, montrent la souplesse des formules relatives aux carrés magiques. Si, comme on l'a montré dans la première partie, on parvient à trouver une solution simple des règles qui doivent régir la transformation du groupe naturel, à l'effet de réduire ses directions non magiques aux deux directions principales, le problème des carrés magiques réguliers de modules composés se trouverait entièrement résolu.

NOTE I

—

CALCUL DES ÉLÉMENTS DE CERTAINS CARRÉS DE MODULES COMPOSÉS

On a vu, dans la première partie (pages 59 et suivantes), une méthode intéressante pour la construction de carrés de modules composés de la forme pq. Elle consistait à décomposer le groupe naturel en groupes partiels de modules p et q.

On peut à priori déterminer les principaux éléments de ces groupes partiels, sans s'astreindre à l'inscription préalable du groupe fondamental principal de module pq et cela par une simple application de formules de progresison.

Le groupe naturel de module $n = pq$ et contenant par suite $n^2 = p^2q^2$ termes est, dans cette méthode, divisé par des parallèles à ses deux directions principales, en groupes partiels contenant chacun p^2 nombres. Cette division produit ainsi, sur une même rangée horizontale ou verticale, q groupes partiels ayant chacun p pour module. En étendant ici la signification donnée aux expressions *ligne* et *colonne*, on désignera par ces mots un ensemble de q termes, chacun d'eux étant constitué par un groupe de module p.

Nous nous proposons de déterminer la constitution du terme général, c'est-à-dire du groupe partiel de rang x dans la colonne de rang y, ainsi que sa constante magique. Si à chacun de ces groupes partiels, on substitue sa constante, l'ensemble de ces constantes

constitue, on l'a vu, un groupe fondamental dont on peut déduire un grand nombre de carrés magiques de module q.

Le premier des groupes partiels, celui qui occupe l'origine du groupe fondamental principal est ainsi constitué.

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 \ldots & p \\
n+1 & n+2 & n+3 \ldots & n+p \\
2n+1 & 2n+2 & 2n+3 \ldots & 2n+p \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(p-1)n+1 & (p-n)+2 & (p-1)n+3 \ldots & (p-1)n+p.
\end{array}$$

Le groupe qui suit dans la première ligne s'obtient en ajoutant p à chacun des termes de ce premier groupe ; le suivant s'obtiendra en ajoutant p à chacun des termes du deuxième groupe et ainsi de suite ; donc, le groupe *de* rang x de cette première ligne sera

$$\begin{array}{ccc}
(x-1)p+1 & (x-1)p+2 \ldots & (x-1)p+p \\
n+(x-1)p+1 & n+(x-1)p+2 \ldots & n+(x-1)p+p \\
2n+(x-1)p+1 & 2n+(x-1)p+2 \ldots & 2n+(x-1)p+p \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
(p-1)n+(x-1)p+1, & (p-1)n+(x-1)p+2, & (p-1)n+(x-1)p+p.
\end{array}$$

La somme des termes de ce groupe est

$$\frac{\left[(p-1)\,n+(x-1)\,p+p\right]+\left[(x-1)\,p+1\right]}{2}\,p^2$$

ou on déduira la constante magique en la divisant par p, de sorte que la valeur de cette constante devient après réduction

$$C=\frac{p^2\,(2x-pq-q-1)+p}{2}.$$

Pour

$$x=1$$

on a

$$C_1=\frac{p^2\,(pq-q+1)+p}{2}.$$

La différence des sommes de deux groupes successifs est p^3 ; celle de leurs constantes est p^2 ; de sorte que la constante du dernier groupe de cette première ligne est

$$C_1 + p^2 (q - 1).$$

Dans chacune des lignes suivantes, les groupes successifs ont une loi de progression identique. Un groupe quelconque dans une ligne donnée se déduira du précédent, en ajoutant p à chacun des termes de celui-ci.

Si l'on examine les groupes qui se suivent dans une même colonne, on constate qu'un groupe se déduit du précédent lorsqu'on ajoute $pn = p^2q$ à chacun des termes de ce dernier. Ainsi le premier groupe dans la ligne de rang y sera

$$\begin{array}{ccc} (y-1)pn+1 & (y-1)pn+2 \ldots & (y-1)pn+p \\ n+(y-1)pn+1 & n+(y-1)pn+2 \ldots & n+(y-1)pn+p \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (p-1)n+(y-1)pn+1, & (p-1)n+(y-1)pn+2, & (p-1)n+(y-1)pn+p. \end{array}$$

et le groupe de rang x dans cette ligne s'obtiendra en ajoutant $(x - 1)\,p$ à chacun des termes précédents.

La somme du terme général, c'est-à-dire du groupe de rang x dans la ligne de rang y sera, en remplaçant n par son égal pq,

$$S = \frac{p^4q\,(2q - 1) + p^3\,(2x - 1) - p^3q + p^2}{2}.$$

La différence de sommes de deux groupes successifs dans une même colonne est $p^4q = p^3n$.

Si l'on y fait $x = y = q$, on obtient la somme du dernier terme du groupe. Cette somme est

$$S_q = \frac{2p^4q^2 - p^4q + p^3q - p^3 + p^2}{2}.$$

La constante magique s'obtiendra en divisant ces expressions par p.

On voit ainsi que la loi de formation des groupes partiels est des plus simples ; le premier terme de chacun d'eux peut être déterminé directement en partant de l'unité, qui occupe l'origine du premier groupe.

Proposons-nous de déterminer le premier terme d'un groupe partiel, lorsqu'on se donne sa constante magique. Si la valeur de cette constante est la seule donnée du problème, le calcul fait connaître ce premier terme.

Soit donc p le module des groupes partiels et soit $(v+1)$ le premier terme du groupe dont la constante est donnée.

Ce groupe sera constitué comme suit :

$$
\begin{array}{cccc}
v+1 & v+2 & v+3\ \ldots & v+p \\
n+v+1 & n+v+2 & n+v+3\ \ldots & n+v+p \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(p-1)n+v+1, & (p-1)n+v+2, & (p-1)n+v+3, & (p-1)n+v+p.
\end{array}
$$

La somme de tous ces termes sera

$$\frac{\left[(p-1)\,n+v+p\right]+(v+1)}{2}\,p^2$$

la constante magique du groupe se réduira finalement à

$$C=\frac{(p-1)\,pq+2v+(p+1)}{2}\,p.$$

Cette expression permet de calculer C lorsqu'on connait v et réciproquement.

Soit $p=5$ $q=3$ $C=565$ (page 61) on en déduit $v=80$ le groupe partiel sera donc

81	82	83	84	85
96	97	98	99	100
111	112	113	114	115
126	127	128	129	130
141	142	143	144	145

Fig. 85

Soit encore $p = 7$ $q = 3$ $C = 1547$ (page 61) ; on en déduit $v = 154$.

On a ainsi un moyen pratique pour la construction des carrés magiques de module pq. La division du groupe fondamental principal donne q^2 groupes partiels. Leurs sommes forment des progressions arithmétiques de raison p^3 en ligne et de raison p^3n en colonne. Leurs constantes magiques sont donc des progressions arithmétiques de raison p^2 en ligne et p^2n en colonne.

Par suite, en partant d'un premier terme arbitrairement choisi, il faudra former un ensemble de q^2 nombres constitués en séries comme il vient d'être dit. Cet ensemble ou groupe fournit un grand nombre de carrés magiques de module q. Chacun des termes de l'un de ces carrés sera envisagé comme la constante d'un *groupe de module p* dont le premier terme sera déterminé par la formule donnée ci-dessus. En remplaçant cette constante par un des carrés magiques déduits de ce *groupe*, on aura constitué le carré cherché.

NOTE II

SUR LA TRANSFORMATION DES GROUPES NATURELS DE MODULE COMPOSÉ. APPLICATION AUX GROUPES DE MODULE PAIR

On a vu que le groupe naturel de module composé doit, par un déplacement des lignes et des colonnes, être transformé, afin de pouvoir fournir des carrés magiques des divers types compatibles avec le module. Nous avons montré que dans un groupe convenablement transformé de module 9, les nombres situés sur une direction dont le paramètre affectant x, n'est pas premier avec le module, telle que $(3x + y)$ par exemple, constituent une série magique ; lorsque celle-ci a été formée en débutant par l'une des colonnes de rang 2,5 et 8.

Si l'on étudie le groupe naturel de module 15, celui-ci possède deux directions magiques $(3x + y)$ et $(5x + y)$ à la condition que l'on constitue les séries au moyen des nombres appartenant aux colonnes 2 — 5 — 8 — 11 et 14 pour la première de ces deux directions, et aux colonnes 3 — 8 et 13 pour la seconde.

Si l'on partage les neuf premiers nombres naturels en sections de trois nombres, et les quinze premiers nombres en sections de trois nombres d'une part, et de cinq nombres d'autre part, on constate que les colonnes ci-dessus indiquées comme donnant des séries magiques, occupent précisément le milieu de chacune de ces sections.

Et si l'on fait, pour chacun des cas, le total de ces nombres médians on trouve 15, 40 et 24.

Or 15 est le tiers de la somme des neufs premiers nombres, 40 et 24 sont le tiers et le cinquième de la somme des quinze premiers nombres. Les groupes de module supérieur donnent lieu à une observation analogue. On pourrait donc en inférer légitimement que les directions considérées ne donnent des séries magiques que parce que les premiers nombres des colonnes interessées (ce sont les colonnes fournissant les divers nombres de chacune des séries) ont pour sommes ces moyennes. Et en effet, reprenons le cas du module 9 ; soient dans un groupe quelconque, a, b et c les colonnes que l'on doit placer à des distances $3x$ l'une de l'autre, pour qu'elles fournissent une série magique sur la direction $(3x + y)$; les nombres d'une telle série seront

$$\begin{array}{lll} a & b + 9 & c + 18 \\ a + 27 & b + 9 + 27 & c + 18 + 27 \\ a + 54 & b + 9 + 54 & c + 18 + 54 \end{array}$$

leur somme est par suite

$$3a + 3b + 3c + 324$$

Écrivons qu'elle est égale à la somme magique 369, nous en déduirons

$$3\,(a + b + c) = 45$$

soit

$$(a + b + c) = 15.$$

Nous en tirons comme conclusion que : pour avoir des séries magiques, suivant une direction $(3x + y)$, dans un groupe de module 9, il faut que la somme des premiers nombres des trois colonnes intéressés soit égale à 15. Si donc nous disposons les neuf premiers nombres naturels, de façon à satisfaire à cette condition, toutes les lignes de direction $(3x + y)$ seront magiques, il est aisé de le vérifier.

Examinons encore le module 15, nous aboutirons à une conclusion semblable.

Soit d'abord la direction $(3x + y)$ et a, b, c, d, f, les cinq colonnes qui fournissent les nombres de la série : les nombres successifs de cette série seront

a	$b + 15$	$c + 30$	$d + 45$	$f + 60$
$a + 75$	$b + 15 + 75$	$c + 30 + 75$	$d + 45 + 75$	$f + 60 + 75$
$a + 150$	$b + 15 + 150$	$c + 30 + 150$	$d + 45 + 150$	$f + 60 + 150$

dont la somme est

$$3(a + b + c + d + f) + 1575.$$

Écrivons qu'elle est égale à la somme magique 1695, nous en déduisons

$$a + b + c + d + f = 40.$$

On aura donc des séries magiques dans une direction $(3x + y)$ si la somme des nombres, occupant la tête des cinq colonnes espacées de $3x$ l'une de l'autre, est égale à 40.

Passons maintenant, pour ce même module 15, aux séries magiques suivant une direction $(5x + y)$. Soient comme précédemment, a, b, c, les nombres occupant la tête des trois colonnes espacées l'une de l'autre de $5x$; les quinze nombres de la série seront

a	$b + 15$	$c + 30$
$a + 45$	$b + 15 + 45$	$c + 30 + 45$
$a + 90$	$b + 15 + 90$	$c + 30 + 90$
$a + 135$	$b + 15 + 135$	$c + 30 + 135$
$a + 180$	$b + 15 + 180$	$c + 30 + 180$

écrivons que leur somme est magique, soit égale à 1695, nous aurons :

$$5(a + b + c) = 120 \quad \text{ou} \quad a + b + c + 24.$$

Si donc la somme des premiers nombres des trois colonnes employées est égale à 24, la série sera magique.

Les développements qui précèdent s'appliquent à un module quelconque. On arrivera toujours à des conséquences identiques.

Soient a le paramètre de la direction adoptée $(ax + y)$ et n le module ; $\frac{n}{a}$ est le nombre des colonnes fournissant les nombres de la série que l'on veut rendre magique. La moyenne des nombres de la première ligne du groupe naturel est $\frac{n+1}{2}$; on en déduira que la somme des nombres occupant la tête des colonnes intéressées devra être $\frac{(n+1)\,n}{2a}$, pour que la ligne ayant la direction donnée soit magique.

La solution du problème devient ainsi très simple. Prenons pour exemple le module 9 ; écrivons les neufs premiers nombres dans leur ordre naturel et partageons cette série en trois sections comme suit :

1. 2. 3 | 4. 5. 6 | 7. 8. 9.

Prenons un nombre choisi à volonté dans la première section, et un autre dans la deuxième, soient 1 et 5 ces deux nombres, qui ajoutés à 9 forment un total égal à 15. Nous placerons donc les colonnes 1. 5 et 9 avec un intervalle de $3x$.

1.. 5.. 9

Prenons maintenant dans les deux premières sections deux autres nombres, soient 2 et 6 ; pour constituer le total de 15, nous devrons prendre 7 dans la troisième section : nous avons ainsi une deuxième série :

2.. 6.. 7

la troisième série sera formée par les trois nombres restants

3.. 4.. 8.

L'ordre des colonnes du groupe est donc ainsi déterminé, il sera par exemple

1. 2. 3. 5. 6. 4. 9. 7. 8
5. 3. 2. 9. 8. 6. 1. 4. 7
6. 8. 1. 2. 3. 9. 7. 4. 5

ou tout autre constitué suivant la même règle, à savoir, que la somme des nombres distante de $3x$ est constante et égale à 15. Toute ligne de direction $(3x + y)$ déduite d'un groupe ainsi constitué sera magique.

Prenons comme second exemple le module 15. Pour obtenir des lignes magiques dans une direction $(3x + y)$, il faut que les colonnes espacées de $3x$ aient pour somme 40. Écrivons les 15 premiers nombres naturels et partageons-les par sections de trois nombres chacun

1. 2. 3 | 4. 5. 6. | 7. 8. 9 | 10. 11. 12 | 13. 14. 15.

Prenons arbitrairement un nombre dans chacune des sections, de façon à former un total de 40, comme ci-dessous

1.. 4.. 8.. 12. 15

Barrons maintenant dans la série naturelle, pour ne pas faire double emploi, les cinq nombres ainsi inscrits. Choisissons ensuite parmi les nombres non barrés, un nombre de chaque section de façon à former le même total, comme par exemple

2.. 6.. 9.. 10.. 13

les nombres non encore employés constitueront la troisième série qui sera

3.. 5.. 7.. 11.. 14

on peut effectuer une permutation quelconque dans chacune des trois séries ainsi déterminées, sans altérer pour cela leurs propriétés.

On aura donc pour le groupe transformé, ayant toutes les lignes magiques dans une direction $(3x + y)$, l'ordre

1. 2. 3. | 4. 6. 5. | 8. 9. 7. | 12. 10. 11. | 15. 13. 14.

ou aussi

1. 2. 3. | 5. 4. 6. | 9. 7. 8. | 11. 12. 10. | 14. 15. 13.
1. 2. 3. | 6. 5. 4. | 9. 8. 7. | 10. 12. 11. | 14. 13. 15.

et beaucoup de combinaisons semblables.

Cherchons maintenant pour le même module l'ordre des colonnes relatif à une direction $(5x + y)$; nous disposerons les quinze premiers nombres naturels en trois sections, comme suit :

1. 2. 3. 4. 5. | 6. 7. 8. 9. 10. | 11. 12. 13. 14. 15

et nous prendrons un nombre dans chacune d'elles de façon à constituer un total égal à 24. Nous aurons par exemple, les quatre séries

1.... 10.... 13
2.... 7.... 15
3.... 9.... 12
4.... 6.... 14

la dernière, forcément constituée par les nombres non encore employés, sera : 5... 8... 11.

De telles combinaisons, que l'on peut faire beaucoup varier, fournissent naturellement un grand nombre de groupes fondamentaux ayant toutes leurs lignes magiques dans la direction considérée.

Nous n'avons, dans ce qui précède, considéré que le cas où la direction x était affectée du paramètre non premier avec le module ; si un tel paramètre affectait la direction y, c'est l'ordre des lignes du groupe naturel qu'il faudrait modifier suivant la règle qui vient d'être établie.

Dans un grand nombre de groupes transformés de module 9, les

nombres situés à une distance de $3x$, ont leurs différences premières avec le module. Cette remarque nous donne un autre moyen de constituer quelques-uns de ces groupes. Disposons pour cela les neuf premiers nombres comme suit

1	4	7
2	5	8
3	6	9

les différences horizontales sont égales à 3, et dans toute autre direction, ces différences sont premières avec 3. Adoptons donc une direction inclinée quelconque telle que $(x + y)$ ou $(2x + y)$, par exemple ; nous pourrons disposer ces neuf nombres comme suit :

1	5	9		1	8	6
2	6	7		2	9	4
3	4	8		3	7	5.

Les lignes horizontales ont bien pour somme 15 ; on en tirerait comme précédemment l'ordre à donner aux groupes fondamentaux.

Il n'est peut-être pas inutile d'ajouter, qu'un ordre déterminé peut subir une permutation circulaire quelconque, sans que ses propriétés en soient altérées.

Si un même paramètre, facteur du module, affecte la direction x dans l'une des équations et la direction y, dans l'autre, il n'est pas nécessaire, pour constituer le groupe fondamental, de faire subir des déplacements identiques aux lignes et aux colonnes du groupe naturel. Il suffit que l'arrangement des lignes et celui des colonnes remplissent chacun, indépendamment l'un de l'autre, la condition requise ; en d'autres termes, les lignes peuvent être disposées suivant un des ordres déterminés comme il a été dit, et les colonnes suivant un autre de ces mêmes ordres. En général, pour une direction $(ax + by)$, il suffit de modifier l'ordre naturel dans la *direction seule* affectée par le paramètre non premier avec le module ;

si le paramètre qui possède un facteur commun avec le module est a, c'est l'ordre des colonnes qu'il faut modifier ; on devra au contraire, changer l'ordre des lignes, si c'est le paramètre b qui n'est pas premier avec le module.

Il est bon de faire observer que lorsqu'on se trouvera en présence de deux équations définissant un carré magique, il faudra non seulement disposer le groupe fondamental de manière à ce que toutes ses lignes soient magiques dans les deux directions ainsi définies, mais encore faudra-t-il vérifier que le groupe peut fournir des séries magiques suivant les deux diagonales ; ceci ne pourra être déterminé que par l'examen des sommes et des différences des deux équations données.

Si l'on voulait appliquer la méthode ci-dessus indiquée pour le module 9, au module de 15, on ne pourrait pas obtenir de résultat satisfaisant.

Ainsi les quinze nombres étant disposés comme suit

1	4	7	10	13
2	5	8	11	14
3	6	9	12	15

on aurait, en adoptant une marche $(x + y)$, l'ordre

1. 2. 3. 5. 6. 4. 9. 7. 8. 10. 11. 12. 14. 15. 13

qui ne peut être une solution, que si l'on permute les deux nombres 10 et 11.

Le fait que les différences de 3 en 3 nombres sont premières avec le module dans certains groupes de module 9, n'est pas une condition du problème.

La méthode qui vient d'être indiquée est générale ; elle suffit pour former tous les groupes pouvant fournir des séries magiques et par suite des carrés réguliers.

Elle peut être aisément étendue aux modules pairs. Mais avant de faire cette application, il importe de préciser les conditions aux-

quelles les carrés réguliers de tels modules, s'il en existe, sont soumis. Nous savons qu'une condition essentielle pour la constitution d'un carré déduit d'un groupe fondamental, est que le déterminant des paramètres des deux équations définissant ce carré, soit premier avec le module ; c'est dire que, pour les modules pairs, ce déterminant doit être impair. On en conclut que si ces modules peuvent fournir des carrés réguliers, l'un au moins de ces quatre paramètres *devra être pair*, c'est-à-dire *avoir un facteur commun avec le module*.

Lorsqu'un paramètre a un facteur commun avec un module composé impair, on sait que, pour la direction définie par l'équation à laquelle appartient ce paramètre, certaines lignes seulement jouissent de la propriété magique. Si l'on applique le calcul à l'effet de déterminer les lignes magiques d'une telle direction *dans un groupe naturel du module pair*, on trouve qu'il n'en existe pas ; car l'équation qui permet de déterminer un nombre de la série magique ne donne pas de solution entière.

Donc, les carrés que nous recherchons ne peuvent être fournis que par le moyen de groupes transformés. Nous verrons que de tels groupes existent et qu'on les détermine par les mêmes moyens que pour les modules impairs.

Les deux paramètres d'une même équation ne peuvent pas être pairs en même temps, car alors le nombre de points rencontrés par la direction définie par une telle équation serait inférieur à n. Pour ce qui est du carré magique régulier, il serait irréalisable car le déterminant des quatre paramètres serait pair dans le cas considéré.

Les deux équations principales peuvent présenter chacune un paramètre pair ; mais si un tel paramètre affectait la même direction dans chacune de ces équations, leur déterminant dans ce cas aussi serait pair et le carré irréalisable.

On peut déjà pressentir par ce qui a été dit au sujet des modules impairs composés, que l'arrangement à adopter pour le groupe fondamental dépend de la valeur du paramètre pair et de la direction que ce paramètre affecte. Si donc on constitue un groupe fondamental compatible avec un paramètre pair donné, ce groupe ne

pourra pas en général donner de ligne magique avec un paramètre pair différent qui affecterait la même direction principale.

Deux équations données fournissant des lignes magiques dans un groupe fondamental, ne donnent pas nécessairement de carré magique. Il faut pour cela que les équations des deux diagonales soient aussi compatibles avec la constitution de ce groupe; en d'autres termes, ces équations ne doivent pas contenir un paramètre pair différent de celui-ci pour lequel le groupe a été établi. Si ce groupe donne par exemple des lignes magiques pour une direction $(2x + y)$, le paramètre affectant x dans l'équation de chacune des deux diagonales ne devra pas contenir *un facteur pair différent de* 2, si ce facteur est diviseur du module; c'est-à-dire que ce paramètre ne pourra pas être égal à 4, s'il s'agit du module 8, mais il pourrait être égal à 6.

Il n'existe pas dans les groupes de module pair de ligne ou de colonnes magiques : par suite, les paramètres affectant une même direction, dans chacune des deux équations principales, ne peuvent pas être égaux et leur somme ou leur différence ne pourra pas être égale au module. En d'autres termes, si $(\alpha\xi + \beta\eta)$ représente l'ordonnance des nombres dans le carré et $(\pi\xi + \rho\eta)$, le degré de ce carré, les valeurs $(a \pm a')$ et $(b \pm b')$ ne devront pas être congrues avec le module; par suite, les quantités $(\alpha + \rho - \pi - \beta)$, $(\alpha - \beta)$, $(- \beta - \alpha)$ et $(\alpha - \pi - \rho + \beta)$ doivent être différentes de zéro, ce que l'on peut exprimer par

$$\alpha + \rho \not\equiv \pi + \beta \quad \text{et} \quad \alpha \not\equiv \beta$$
$$\alpha + \beta \not\equiv \pi + \rho \quad \text{et} \quad \alpha \not\equiv - \beta.$$

Dans le cas contraire, une des diagonales se réduirait à une ligne ou à une colonne du groupe fondamental et ne serait par suite pas magique.

On voit ainsi à priori qu'il n'existe pas de carrés à ordonnance oblique, pour les modules pairs; car cette ordonnance exige l'existence dans le groupe d'une ligne magique et les diagonales seules présentent ce caractère dans les groupes considérés ici.

α, β, π et ρ étant les caractéristiques ou paramètres de l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques, leur déterminant doit, tout comme $(ab' - ba')$ être premier avec le module ; par conséquent, un de ces paramètres au moins devra être pair ou nul ; mais α et π d'une part, β et ρ d'autre part ne peuvent pas être pairs en même temps ; si l'une de ses quantités, α par exemple, est paire, ρ seulement pourra être pair aussi. Ces principes généraux établis, nous pouvons passer aux applications.

Pour déterminer l'arrangement à donner aux lignes ou aux colonnes du groupe fondamental, à l'effet d'en déduire des carrés magiques, la formule à employer et qui a été précédemment indiquée est

$$\sum = \frac{(n+1)\,n}{2a}$$

a représente le paramètre pair affectant une des deux directions principales, et Σ la somme des nombres indiquant, dans le groupe naturel, le rang des colonnes ou des lignes qui fournissent les nombres de la série magique dans la direction considérée.

Soit comme exemple $(ax + y)$ la direction considérée ; $\frac{n}{a}$ colonnes seules fournissent les nombres de la série magique ; la somme des nombres occupant la tête de ces colonnes devra être égale à $\frac{(n+1)\,n}{2a}$. S'il s'agit d'une direction $(x + ay)$, c'est la somme des nombres indiquant le *rang* dans le groupe naturel de $\frac{n}{a}$ lignes fournissant la série magique, qui aura la valeur indiquée.

Pour simplifier l'exposition, nous ne prendrons comme exemple qu'une direction telle que $(ax + y)$, ce qui sera dit à cet égard pouvant être appliqué à une direction $(x + ay)$. Une première conséquence à déduire de ce qui précède est que, si $n = 2a$, il n'y a que deux colonnes du groupe qui donnent tous les nombres d'une série magique. La somme des nombres occupant la tête de ces deux colonnes est dans ce cas égale à $(n + 1)$. Par suite pour qu'un

groupe puisse avoir toutes ses lignes magiques dans une direction $\left(\frac{n}{2}x + y\right)$, il faut que l'arrangement à adopter pour les n premiers nombres naturels soit tel que la somme de deux quelconques de ces nombres *distants de* $\frac{n}{2}x$ soit égale à $(n + 1)$; c'est-à-dire que si la première moitié de ces nombres est disposée dans son ordre naturel, les $\frac{n}{2}$ nombres restants devront être disposés dans l'ordre inverse. Ainsi dans l'hypothèse considérée, l'ordre des colonnes pour le module 4 et la direction $(2x + y)$, sera

1. 2. 4. 3.

et, pour le module 8 et la direction $(4x + y)$, cet ordre devra être

1. 2. 3. 4. 8. 7. 6. 5.

Nous rappellerons encore que deux nombres ayant pour somme $(n + 1)$ peuvent occuper une situation quelconque dans une telle ligne, à la conditon qu'ils se trouvent distants de $\frac{n}{2}x$.

Ainsi par exemple les deux arrangements

3. 1. 2. 4.

et

7. 1. 4. 3. 2. 8. 5. 6.

sont des solutions de la question.

Applications. *Module* 4. — Soient les équations.

$$\xi = 2x + y$$
$$\eta = x + 2y$$

satisfaisant aux conditions générales qui ont été définies. Pour for-

mer le carré, on adoptera par exemple l'un des deux groupes suivants

9. 10. 12. 11	13. 14. 16. 15
13. 14. 16. 15	5. 6. 8. 7
5. 6. 8. 7	1. 2. 4. 3
1. 2. 4. 3	9. 10. 12. 11

ou toute autre combinaison analogue.

On en tire les deux carrés

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Fig. 86

7	14	11	2
12	1	8	13
6	15	10	3
9	4	5	16

Fig. 87

qui peuvent d'ailleurs être déduits l'un de l'autre par permutations circulaires, car ils sont diaboliques. On peut en effet vérifier que l'ordonnance des nombres est $(2\xi + \eta)$ et que le degré de ces carrés est $(-\xi - \eta)$ ou $(3\xi + 3\eta)$.

Les nombreux carrés de module 4 que l'on peut aussi constituer tout en paraissant différents, ne seront pas distincts en réalité, leurs colonnes étant pour la plupart d'entre eux constituées par les mêmes nombres permutés circulairement. On le conçoit d'ailleurs aisément à priori, le nombre de paramètres possibles n'étant pas nombreux, et les signes différents dont on voudrait les affecter ne pouvant pas modifier essentiellement le carré. En effet l'équation $\xi = x - 2y$ équivaut à $\xi = x + 2y$, puisque pour le module 4, $-2 \equiv 2$. De même l'équation $\xi = 2x + 3y$ équivaut à $\xi = -2x - y$.

Module $n = 8$. — Un des quatre paramètres des deux équations devra être égal à 2 ou à 4. Nous avons déjà indiqué les arrangements

possibles relatifs au paramètre 4. Pour ce qui est du paramètre 2, l'arrangement adopté doit être tel que la somme des nombres pris de deux en deux dans la première ligne soit égale à $\frac{(n+1)n}{2a} = 18$.

On aura par exemple l'ordre

1. 2. 4. 3. 5. 6. 8. 7

ou

1. 3. 8. 7. 4. 2. 5. 6

ou tout autre semblablement formé.

Pour le module 8, les paramètres à employer dans les deux équations varient de 1 à 7 ; les combinaisons possibles seront donc très variées et le nombre de carrés magiques réguliers très-considérable.

Nous nous bornerons pour ce module à donner ci-après quelques systèmes d'équations [1], en indiquant en même temps l'ordonnance des nombres dans les carrés que l'on en déduit

$\left.\begin{array}{l}\xi = x + 2y \\ \eta = 2x + 3y\end{array}\right\}$ ordonnance $5\xi + 2\eta$, degré $-\xi + \eta$

$\left.\begin{array}{l}\xi = x + 2y \\ \eta = 4x + 7y\end{array}\right\}$ ordonnance $\xi + 2\eta$, degré $5\xi + \eta$

$\left.\begin{array}{l}\xi = x + 4y \\ \eta = 4x + 5y\end{array}\right\}$ ordonnance $\xi + 4\eta$, degré $-3\xi + \eta$

$\left.\begin{array}{l}\xi = 2x + 3y \\ \eta = 3x + 4y\end{array}\right\}$ ordonnance $4\xi + 3\eta$, degré $-\xi + \eta$

[1] Si au lieu de partir de deux équations fondamentales, on voulait construire un carré en se donnant à priori l'ordonnance des nombres et son degré, il faudrait tout d'abord que les paramètres y relatifs satisfassent aux conditions plus haut établies. Ceci étant, on devra remonter aux équations principales afin de pouvoir *déterminer le groupe fondamental* dont on doit déduire le carré.

$\left.\begin{array}{l}\xi = 2x + 5y \\ \eta = 5x + 7y\end{array}\right\}$	ordonnance degré	$3\xi - \eta$ $2\xi + \eta$
$\left.\begin{array}{l}\xi = 5x + 5y \\ \eta = 6x + 7y\end{array}\right\}$	ordonnance degré	$3\xi + \eta$ -3ξ
$\left.\begin{array}{l}\xi = 3x + 6y \\ \eta = 6x + 7y\end{array}\right\}$	ordonnance degré	$7\xi + 2\eta$ $\xi - 3\eta$
$\left.\begin{array}{l}\xi = 4x + y \\ \eta = 3x + 6y\end{array}\right\}$	ordonnance degré	$-2\xi + 3\eta$ $\xi - \eta$

Module $n = 16$. — Il faut déterminer l'ordre du groupe pour les directions $(2x + y)$, $(4x + y)$ et $(8x + y)$. Pour la première de ces directions, la somme des nombres distants de $2x$ doit être égale à 68 ; pour que la direction $(4x + y)$ puisse avoir ses lignes magiques, il faut que dans la première ligne du groupe, la somme des nombres distants de $4x$ soit égale à 34 ; enfin la somme des nombres distants de $8x$ devra être égale à 17 pour que la direction $(8x + y)$ ait ses lignes magiques. On aurait par exemple pour la première de ces directions l'ordre

1. 2. 4. 3. 5. 6. 8. 7. 9. 10. 12. 11. 13. 14. 16. 15

et pour la seconde.

1. 2. 3, 4. 6. 7. 8. 5. 11. 12. 9. 10. 16. 13. 14. 15

Nous passerons maintenant à l'examen des modules pairs composés de deux facteurs premiers dont l'un *est impair*. Ils se distinguent essentiellement des précédents.

Module $n = 6$. — Nous devons chercher l'arrangement à donner au groupe fondamental pour les deux directions $(3x + y)$ et $(2x + y)$ La première de ces deux directions donnera toujours des lignes magiques, pour un groupe dans lequel la somme des deux nombres distants de $3x$ est égal à 7. Il en sera de même des directions à pa-

ramètre impair, pour tous les modules de la nature de ceux que nous étudions ; nous n'aurons donc pas à y revenir.

Pour ce qui est de la direction $(2x + y)$, la somme des trois nombres distants l'un de l'autre de $2x$ devra être égale à

$$\frac{(n+1)\,n}{4} = \frac{21}{2};$$

il n'existe donc pas de solution entière.

Ce résultat caractéristique est commun à tous les modules composés de deux facteurs premiers, dont l'un impair. Il est une conséquence du fait que la somme de n premiers nombres naturels est impaire. Or un groupe de module pair ne peut donner de carré magique que si un au moins des paramètres des deux équations est pair. Il n'existe donc pas de carrés réguliers pour les modules que nous examinons.

Modules pairs ayant un seul facteur impair, le second facteur étant une puissance de 2 différente de la première. Ils sont de la forme $n = 2^k(2p + 1)$. Pour ces modules, la direction $(2^k x + y)$ ne peut pas donner de ligne magique.

Soit comme exemple $n = 12$; l'ordre du groupe pour la direction $(4x + y)$ devrait satisfaire à la condition

$$\frac{(n+1)\,n}{8} = \frac{39}{2},$$

insoluble en nombres entiers.

De même pour $n = 20$, on trouverait également que la somme des cinq nombres distants de $4x$ devrait être égale à $\frac{105}{2}$.

L'influence d'un facteur impair dans le module se manifeste nettement ainsi. Tout module pair contenant un ou plusieurs facteurs impairs ne pourra pas fournir de séries magiques pour une direction au moins.

Ceci établit pour les modules pairs une distinction essentielle entre ceux qui sont exclusivement puissances de 2 et les autres. Ces

derniers offrent, au point de vue des carrés magiques une nouvelle division. Il faut en distinguer ceux qui sont composés du facteur 3.

Nous avons montré qu'un module pair ne peut donner de carré magique, que si l'une des deux équations fondamentales est affectée d'un paramètre pair. Or quel que soit le paramètre impair qui affecte la même direction (celle ayant le paramètre pair) dans la seconde équation, la somme ou bien la différence avec le premier sera forcément un multiple de 3. Par suite l'arrangement du groupe devra satisfaire en même temps aux directions $(2x + y)$ ou $(x + 2y)$ et à $(3x + y)$ ou $(x + 3y)$. ce qui n'est pas en général possible. Donc les modules pairs ayant un facteur 3, ne peuvent pas donner de carrés *magiques réguliers*.

Les modules ayant un ou plusieurs facteurs impairs différents de 3, présentent aussi une particularité. On ne pourra pas, étant données deux équations fondamentales compatibles avec le module, construire de carré magique, si la somme ou la différence des deux paramètres impairs affectant la même direction dans ces équations, est un multiple du produit des facteurs pairs du module ; car dans ce cas la diagonale correspondante ne serait pas magique.

En résumé, il existe de nombreux carrés réguliers de module pair. Les restrictions qui en limitent relativement les variétés sont de même nature que celles concernant la constitution des carrés de modules composés impairs.

Une distinction essentielle entre les modules impairs et les modules pairs, consiste en ce que ces derniers ne peuvent jamais fournir de carrés à ordonnance oblique.

Nous n'avons étudié dans ce travail que les transformations dans lesquelles les lignes et les colonnes du groupe fondamental sont toujours constituées par les mêmes éléments. Il en existe beaucoup d'autres qui n'ont pas ce caractère. Les divers nombres de chacune des lignes et colonnes du groupe fondamental peuvent appartenir à des lignes et à des colonnes différentes du groupe naturel. L'application à de tels groupes des principes qui ont été exposés donnera toujours des carrés magiques.

Le développement de la question nous entrainerait trop loin.

Nous nous contenterons de donner un exemple de groupe de de cette espèce, pour le module 8.

Partageons le groupe naturel en huit tranches ainsi qu'il est indiqué sur la figure.

57	58	59	60	61	62	63	64
49	50	51	52	53	54	55	56
41	42	43	44	45	46	47	48
33	34	35	36	37	38	39	40
25	26	27	28	29	30	31	32
17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

Fig. 88

On constituera un groupe fondamental en rangeant en ligne les huit nombres de chacune de ces tranches en suivant pour ces tranches et pour ces nombres l'ordre de leur succession dans un sens choisi arbitrairement, de droite à gauche ou de gauche à droite. Ce sens une fois adopté ne devra pas varier pendant la construction de tout groupe. On pourra partir d'une *tranche quelconque* et d'un *nombre quelconque* de cette tranche, Mais ce nombre étant adopté pour la première tranche. On devra pour chacune des autres, débuter par le nombre occupant la même situation. Ci-après un groupe ainsi constitué, auquel on peut d'ailleurs, on le com-

prend facilement, faire subir une permutation circulaire quelconque.

17	18	19	20	28	27	26	25
33	34	35	36	44	43	42	41
49	50	51	52	60	59	58	57
53	54	55	56	64	63	62	61
37	38	39	40	48	47	46	45
21	22	23	24	32	31	30	29
5	6	7	8	16	15	14	13
1	2	3	4	12	11	10	9

Fig. 89

Comme application, adoptons les deux équations

$$\xi = x - 2y$$
$$\eta = 2x - y,$$

Nous en déduisons l'ordonnance $-3\xi - 2\eta$ et le degré $-\xi + \eta$; on aura ainsi le carré magique

14	25	49	38	7	20	60	47
32	11	42	61	21	2	35	56
39	8	28	59	46	13	17	50
53	22	3	36	64	31	10	41
58	45	5	18	51	40	16	27
44	63	30	9	33	54	23	4
19	52	48	15	26	57	37	6
1	34	55	24	12	43	62	29

Fig. 90

Les équations

$$\xi = 4x + y$$
$$\eta = 5x + 6y$$

donneraient un carré dont l'ordonnance serait $(2\xi - 3\eta)$ et le degré $(3\xi + \eta)$. Nous le donnons ci-après.

24	45	56	57	36	25	4	13
62	51	42	19	10	7	30	39
34	27	2	15	22	47	54	59
12	5	32	37	64	49	44	17
29	40	61	52	41	20	9	8
55	58	35	26	3	14	23	46
43	18	11	6	31	31	63	50
1	16	21	48	53	60	33	28

Fig. 91

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

PREMIÈRE PARTIE

De l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques impairs . . . 3

CHAPITRE PREMIER

Carrés magiques de modules premiers. 5

A. Types de carrés à ordonnance oblique 6
B. Types de carrés à ordonnance cavalière 14

CHAPITRE II

Carrés magiques impairs de modules composés 36

NOTE. — Des divers modes de génération d'un même carré . . 63

DEUXIÈME PARTIE

De l'application du calcul au problème des carrés magiques 67

NOTE I. — Calcul des éléments de certains carrés de module composé 107
NOTE II. — Sur la transformation des groupes naturels de module composé. Application aux modules pairs 112

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE





